愛知県高等学校数学研究会
数 学 科 教 育 情 報 委 員 会

**数Ⅱ** 【図形と方程式】軌跡

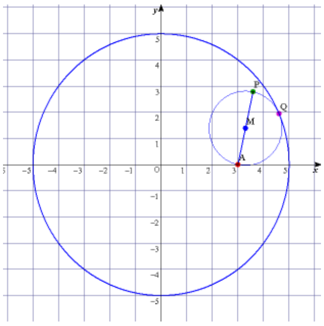
**2008 横浜国立大学　工学部（後期）【２】**

$xy$ 平面上に原点 $O$ を中心とする半径５の円 $C_1$ と点 $A(3、0)$ がある。$A$ を通り $C_1$ に内接する円 $C_2$ を考える。点 $P$ を $AP$ が $C_2$ の直径になるようにとる。$C_2$ の中心を $M$、$C_1$ と $C_2$ の接点を $Q$ とする。次の問いに答えよ。

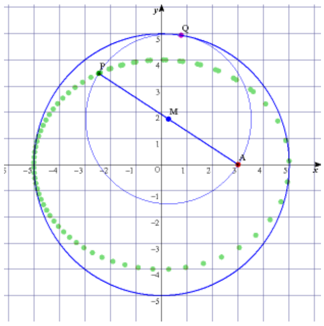
(1) $Q$ の座標を $(5\cos\theta、5\sin\theta)$ とするとき、$M$ の座標を $\theta$ を用いて表せ。

(2) $C_2$ が $A$ を通り $C_1$ に内接しながら動くとき、$P$ の軌跡を求めよ。

GRAPES を使うとパラメータ $\theta$ を動かすことによって軌跡を具体的に確認することができる。【図①②】



図①



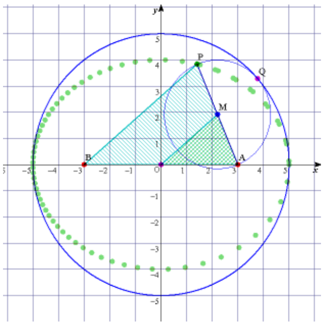
図②

また、(2)について、楕円の定義の復習をしつつ図形的に解法することもできる。

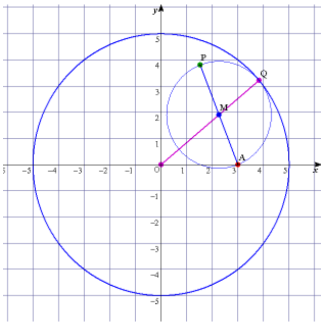
△ AMO について 2AM ＝ AP を考え、2AO となる点 B をとる。すると△ AMO と△ APB は相似となる。これはパラメータ $\theta$ を動かしても変わらない。【図③】

ここで楕円の定義を復習し、BP+PA について考える。直線 QM は中心 O を通るので原点を中心とする円の半径をR、内接する円の半径を r とすると、図⑤のように BP+PA ＝２R で一定であることがわかる。

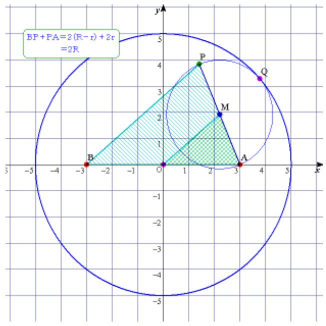
楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 、焦点 $(\pm c、0)$ とするとき、$a=5$、$c=3$ より $b=4$ が求められ、軌跡の方程式を求めることができる。



図③



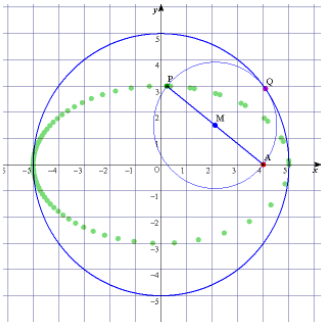
図④



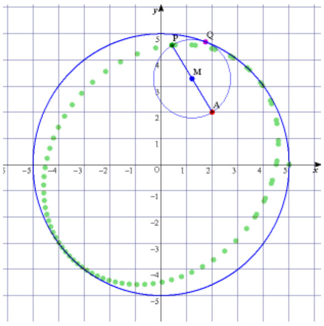
図⑤

この問題において、点 A を動かしても楕円になることの確認もできる。【図⑥⑦】

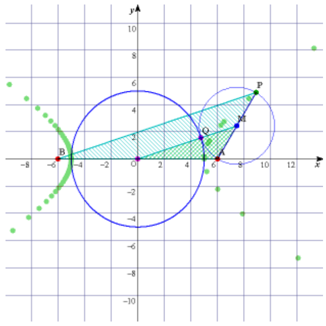
また、円外に点 A を動かし双曲線になることの確認をすることもできる。この場合、楕円と同様に図形から双曲線の定義を確認することができる。【図⑧】



図⑥



図⑦



図⑧