

数 I 【方程式と不等式】 2次方程式（実数解）

2008 京都大学 理・医（医）・薬・工・農・総合人間（理系）学部（前期）【4】

定数 a は実数であるとする。関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点はいくつあるか。
 a の値によって分類せよ。

① $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフを図示し、 a を動かして共有点の個数がどのように変わるかを GRAPES で調べる。しかし、この方法では調べにくいことに気がつく。

次に $f(x)=x^2-2$ 、 $g(x)=2x^2+ax-1$ とすると、

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=\pm g(x) \Leftrightarrow f(x)\pm g(x)=0$$

より、 $y=f(x)+g(x)$ 、 $y=f(x)-g(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数を数えればよいことを示し、

② $y=f(x)+g(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

③ $y=f(x)-g(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

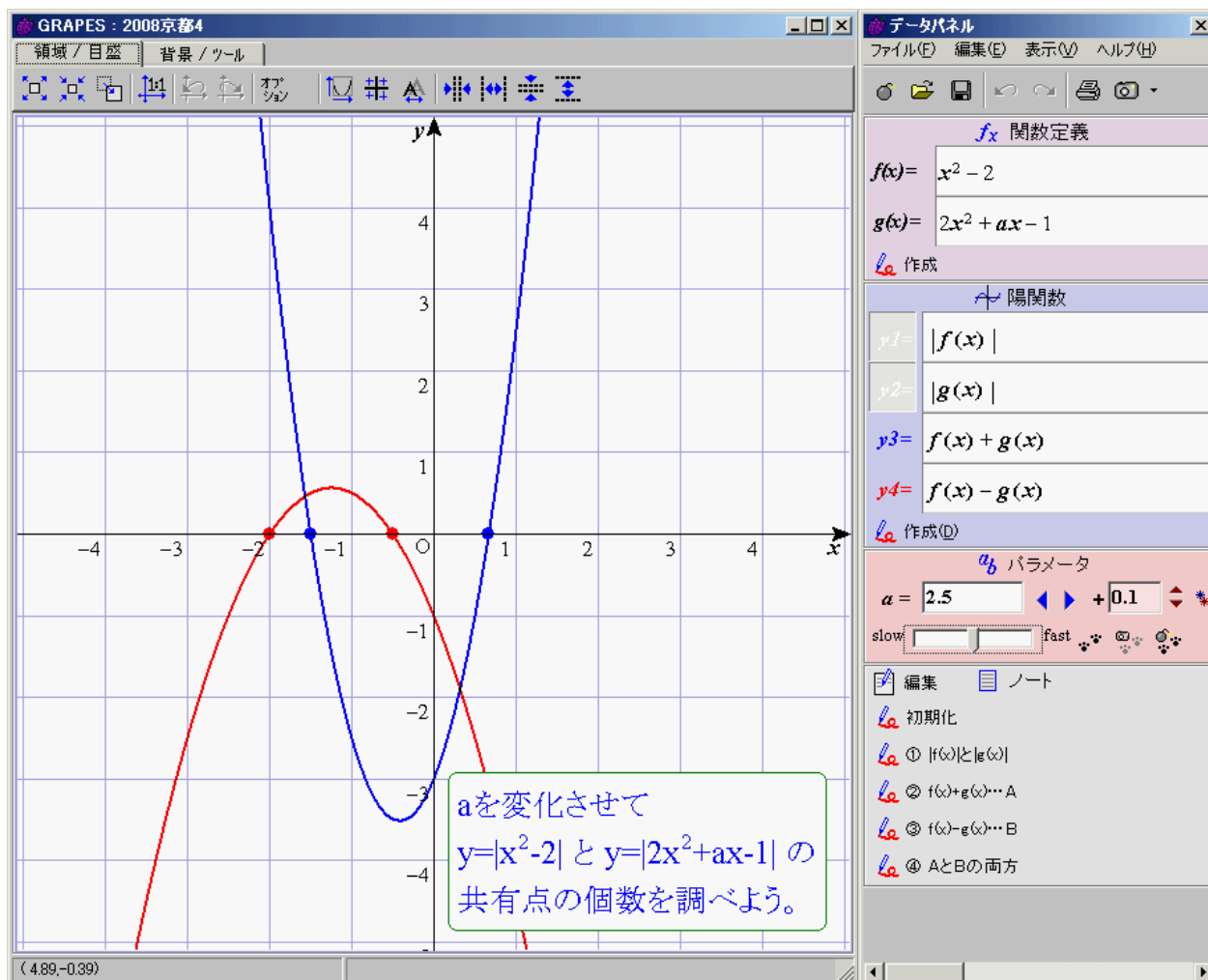
を調べる。すると②は常に2個、③は $a=\pm 2$ の前後で0個～2個と変わることがわかる。最後に

④ ②と③を同時に表示する

と、 $a=\pm 2.1$ 付近（実は $a=\pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき）で共通解を持つために解の個数が4個でなく3個になることが分かる。

最後にもう一度①を見せ、解答の確認をするとよい。

今回の場合、与えられた関数のグラフで直接考えるよりも、適切な式変形をして考えやすくすることができる、ということが分かる。また、気がつきにくい共通解の存在についても、グラフから確かめることができる。



なお、別解として、

$$\begin{aligned} |x^2-2| &= |2x^2+ax-1| \Leftrightarrow 2x^2+ax-1 = \pm(x^2-2) \\ &\Leftrightarrow x^2+ax+1=0 \text{ または } 3x^2+ax-3=0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{-x-1}{x} \text{ または } a = \frac{-3x+3}{x} \end{aligned}$$

と考え、

$$y = \frac{-x-1}{x}, y = \frac{-3x+3}{x} \text{ のグラフと } y=a \text{ のグラフの共有点の個数}$$

を調べて答えを出す方法もある。

この場合、数学Ⅲの知識が必要になるが、グラフが正確に描ければ共通解の存在について見落とすことなく答えを導くことができる。

