

数Ⅲ 【積分法の応用】体積

2008 早稲田大学 基幹理工・創造理工・先進理工学部【5】

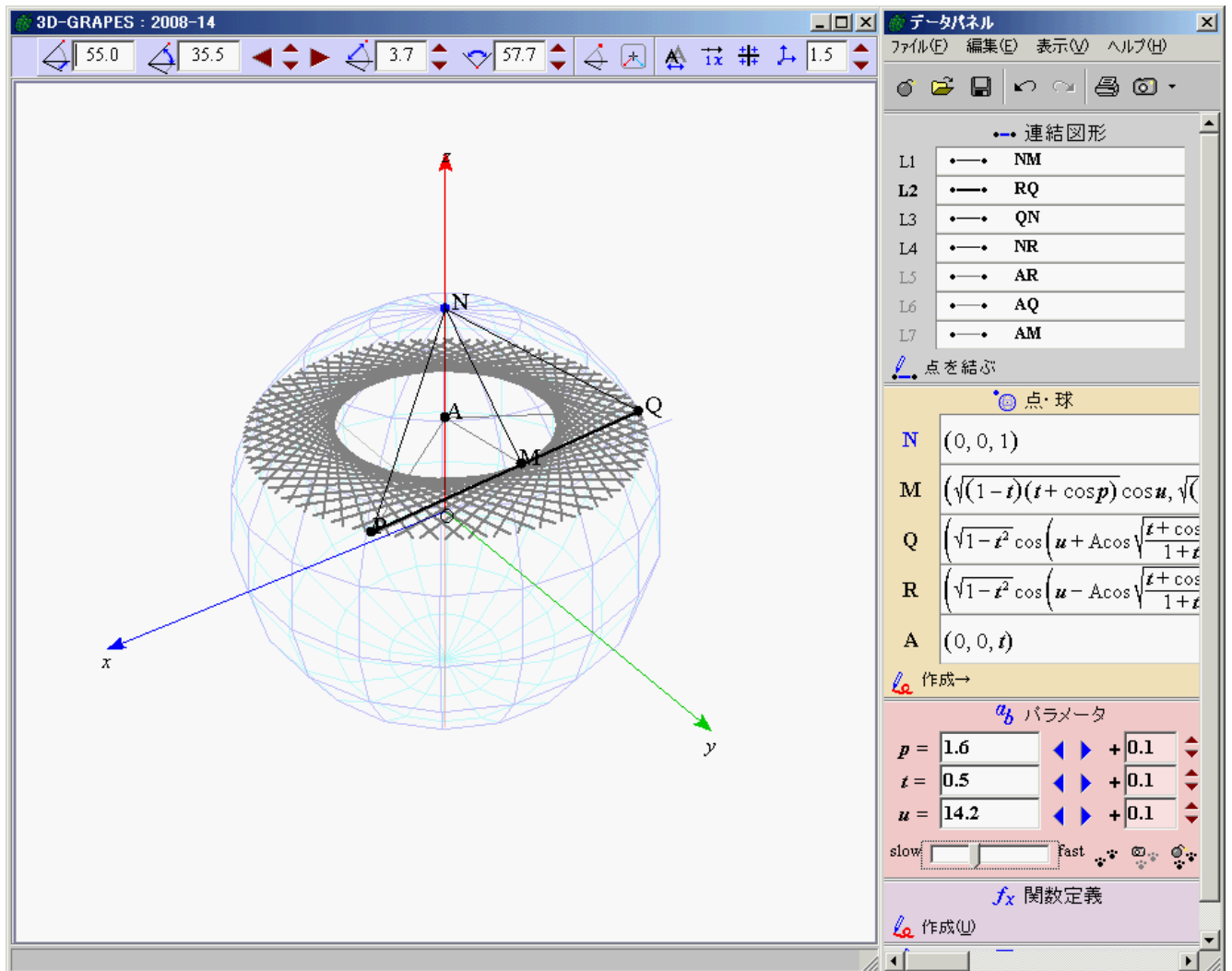
$xyz$  座標空間において、原点を中心とする半径1の球面  $S$  上に点  $N(0, 0, 1)$  をとる。また、 $0 < \theta < \pi$  を満たす  $\theta$  に対し、次の2つの条件

- (i)  $NP = NQ$
- (ii)  $\angle PNQ = \theta$

を満たす  $S$  上の動点  $P, Q$  が通過してできる立体図形  $T$  を考える。

- (1) 点  $P$  と点  $Q$  の座標は等しいことを示せ。
- (2) 点  $P$  が平面  $z = h$  上にあるとき、線分  $PQ$  の長さを  $\theta$  と  $h$  で表せ。
- (3)  $T$  を平面  $z = h$  で切ったときの断面の概形をかき、その面積を  $\theta$  と  $h$  で表せ。
- (4)  $h$  のとりうる値の範囲に対して、 $T$  の体積  $V$  を  $\theta$  で表し、 $\theta$  を動かしたときの  $V$  の最大値を求めよ。

ある  $\theta$  において線分  $PQ$  がどのような位置をとりうるのかを考える。また、 $\theta$  の変化にともなってどのように変化するのか、最終的に  $z = h$  における断面図を描いて見せることでイメージをつかみやすくなる。



※  $\theta$  は  $p$  で、 $h$  は  $t$  で表している。