

数B 【ベクトル】ベクトルと図形（平面）

2008 中央大学 理工学部（センター試験併用）【3】

鋭角三角形 ABC の外接円 S の中心（外心）を O とし、 S の半径を R とする。円 S の弧 \widehat{BC} 、 \widehat{CA} 、 \widehat{AB} と直線 BC 、 CA 、 AB に関して対称な円弧をそれぞれ L_1 、 L_2 、 L_3 とする。このとき、3つの弧 L_1 、 L_2 、 L_3 は三角形 ABC の垂心で交わる。このことを次のようにして示せ。

三角形 ABC の外心 O と直線 BC 、 CA 、 AB に関して対称な点をそれぞれ A' 、 B' 、 C' とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、 H を $\overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ により定まる点とする。

- (1) $\overrightarrow{OA'}$ 、 $\overrightarrow{OB'}$ 、 $\overrightarrow{OC'}$ を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{A'B'}$ を \vec{a} と \vec{b} で表し、三角形 $A'B'C'$ は三角形 ABC と合同であることを示せ。
- (3) $\overrightarrow{HA'}$ 、 $\overrightarrow{HB'}$ 、 $\overrightarrow{HC'}$ を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表し、3つの弧 L_1 、 L_2 、 L_3 は点 H で交わることを示せ。
- (4) \overrightarrow{CH} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表し、点 H は三角形 ABC の垂心であることを示せ。

ベクトルを用いて順序立てて証明をするのであるが、シンデレラで描いてみれば直感的によく分かる。とてもきれいな性質なので、図形の美しさを体験させるよい教材である。

