数Ⅲ　【微分法の応用】微分法の不等式への応用

2009 金沢大学　理工（電子情報学類）学域（後期）【５】

m、n を自然数とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ は $x \geqq e$ において単調に減少することを示せ。

(2) $n>m \geqq 3$ のとき、$m^n>n^m$ が成り立つことを示せ。

(3) $2^n \leqq n^2$ を満たす n をすべて求めよ。

(4) k を２以上の自然数とする。$m+n=k$ かつ $m^n>n^m$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ の個数 S_k を求めよ。

2009 金沢大学　理工（数理科学類）学域（後期）【７】

(1)～(3)【５】の(1)～(3)と同じ。

(4) $m^n=n^m$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

ここでは(4)について考える。

【５】では(1)～(3)の結果を用いて、(4)の結果を mn 平面（GRAPES 上では xy 平面）に書き表すことができる。その後、S_k を k の式で表すわけだが、手間もかかるし、規則性も少々見つけにくい。そこで GRAPES でグラフを書き、実際に k を動かすと、k と S_k の関係が見えてくるのではないか。

k が奇数と偶数で場合分けが必要なことはもちろんであるが、$k=6$ だけは例外として扱わなければならないことに気がつくかどうかも大切である。これは、$m^n=n^m$ を満たす自然数のうち、$m \fallingdotseq n$ となるのが $2^4=4^2$ のみである、ということと関係している。

【７】の(4)もグラフを見れば結果は一目瞭然（境界線上の格子点が解）である。