

数B 【ベクトル】空間ベクトルと図形（空間）

2009 九州大学 工学部（後期）【3】

$O$  を原点とする  $xyz$  空間内の点  $A, B, C$  をそれぞれ、 $A(-1, 2, 3)$ 、 $B(0, 1, 2)$ 、 $C(0, 1, 0)$  とし、2点  $A, B$  を通る直線を  $l$  とする。以下の問いに答えよ。

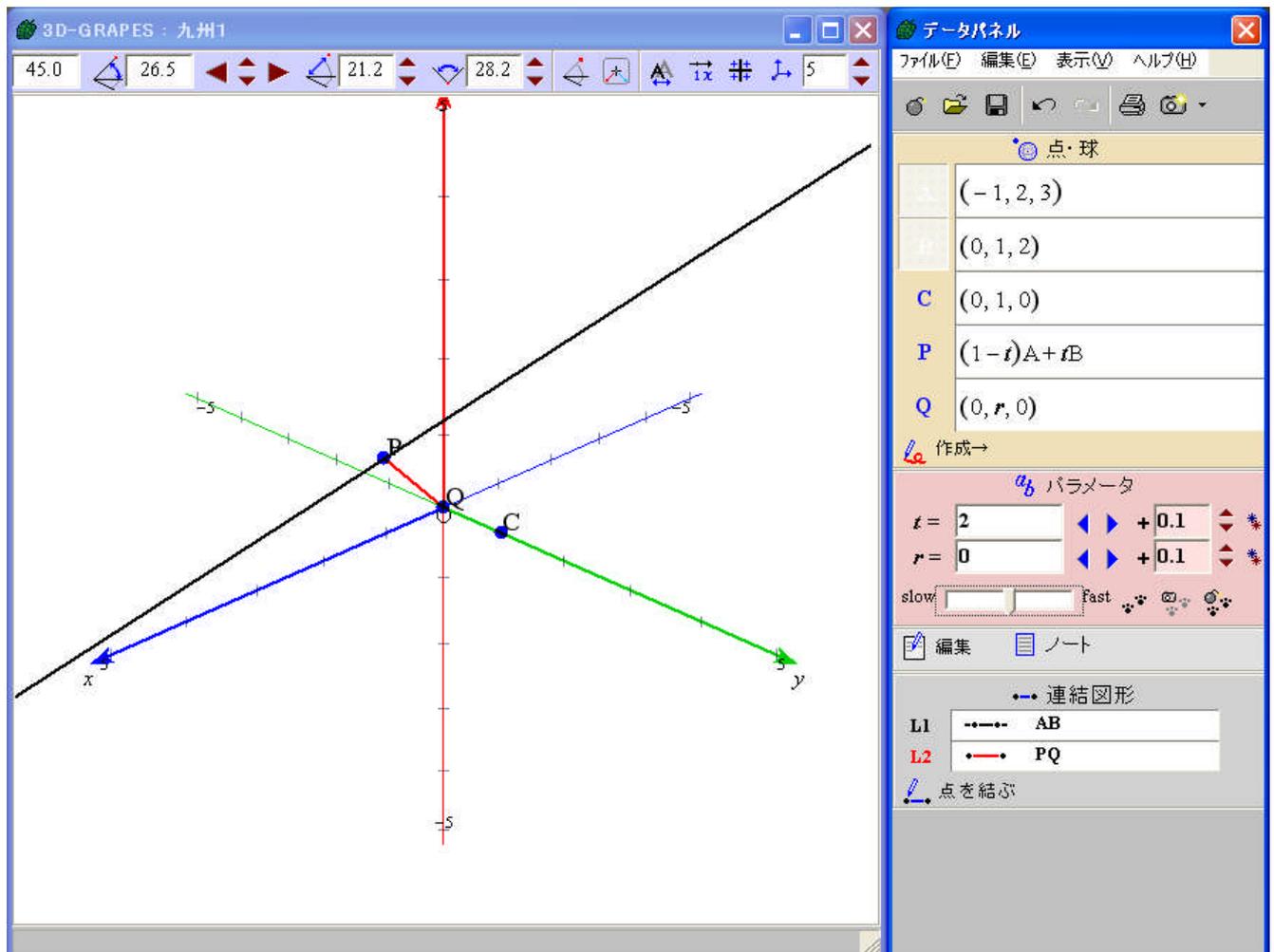
(1) 点  $P$  は直線  $l$  上を動き、点  $Q$  は  $y$  軸上を動くものとする。このとき、2点  $P$  と  $Q$  の距離の最小値を求めよ。

また、 $P$  と  $Q$  との距離が最小となるときの  $P$  と  $Q$  をそれぞれ  $P_0, Q_0$  とする。 $P_0$  と  $Q_0$  の座標を求めよ。

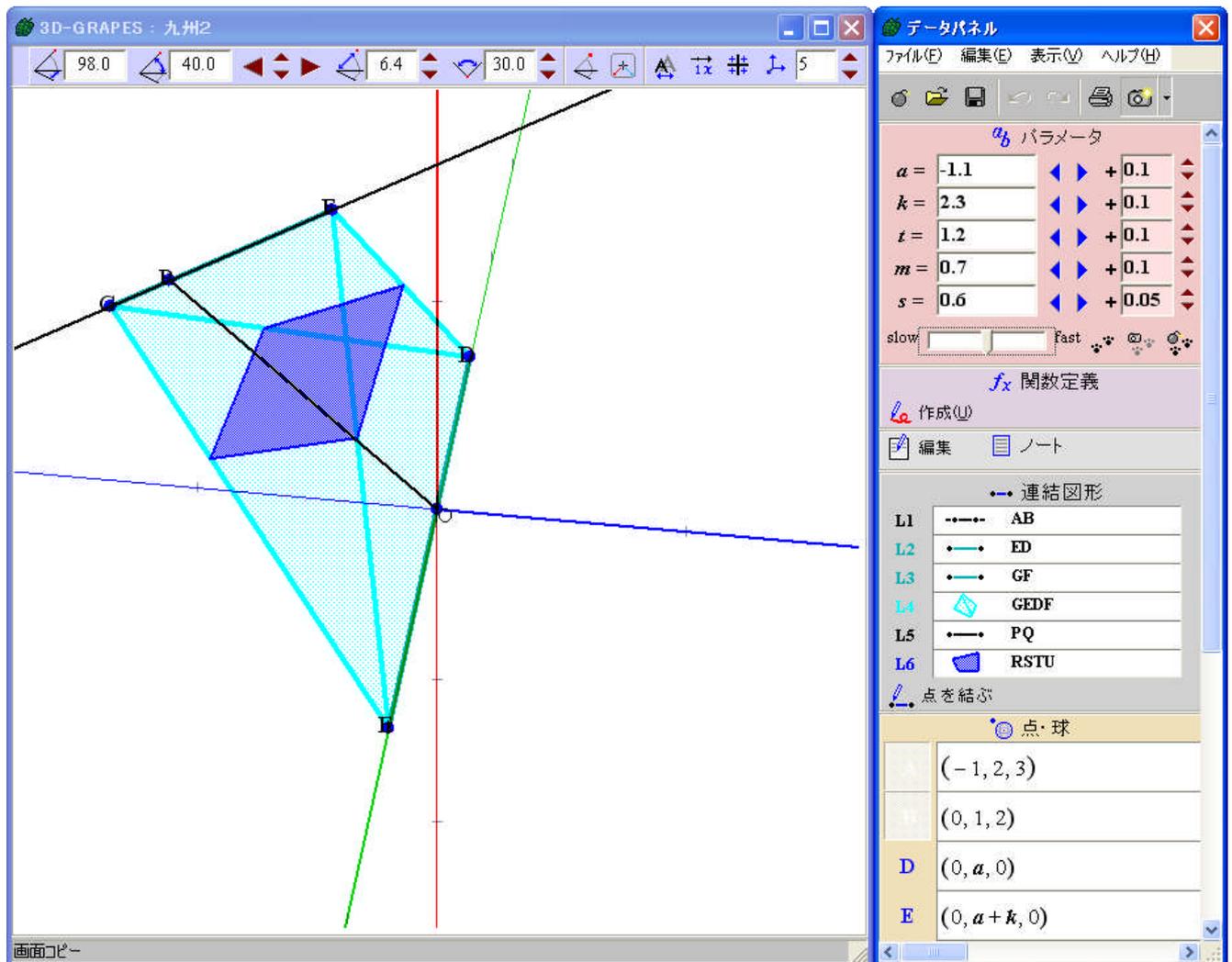
(2)  $P_0$  との距離が  $s$  であるような点の一つを  $S$  とする。

点  $S$  から三角形  $P_0 Q_0 C$  を含む平面に下ろした垂線とその平面との交点を  $R$  とするとき、線分  $SR$  の長さを求めよ。

(3)  $y$  軸上に長さ  $k$  の線分  $DE$  があり、直線  $l$  上に長さ  $m$  の線分  $GF$  がある。四面体  $DEFG$  の体積を求めよ。



(1) 視点を変えながらパラメータ  $t$  と  $r$  を動かし、試行錯誤しているうちに  $PQ$  と直線  $l$ 、 $PQ$  と  $y$  軸がそれぞれ垂直になるときが最短になることに気づくことができる。実際には直線  $l$  と垂直な状態を作り、その後、 $y$  軸と垂直になるように動かすと正解に早くたどり着く。



(3) 体積が線分 $DE$ と線分 $FG$ の位置によらないことを確認することができる。  
 実際、線分 $P_0Q_0$ に垂直な平面でこの立体の切り口を考えると、できる平行四辺形は同じである。  
 カヴァリエリの原理より、切り口の面積が同じであれば体積も同じであるので、特殊な位置で考えることもできるし、  
 平行四辺形の面積を求めて、 $P_0Q_0$ 方向に積分してもよい。

(参考) カヴァリエリの原理

底面積も高さも等しい2つの立体を、底面に平行な同じ高さの平面で切ったとき、  
 2つの切り口の面積がいつも等しいならば、2つの立体の体積は同じである。

★カヴァリエリという名称は出てきませんが、数Iの「図形と計量」で球の体積を求める解説で登場しています。