数Ⅱ　【図形と方程式】軌跡

数Ⅲ　【関数と極限】関数の極限

2010 高知大学　理学部（前期）【４】

xy 平面上の原点を中心として半径１の円 C を考える。$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし、C 上の点 $(\cos\theta、\sin\theta)$ を P とする。P で C に接し、さらに y 軸に接する円でその中心が円 C の内部にあるものを S とし、その中心 Q の座標を $(u、v)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) u と v をそれぞれ $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を用いて表せ。

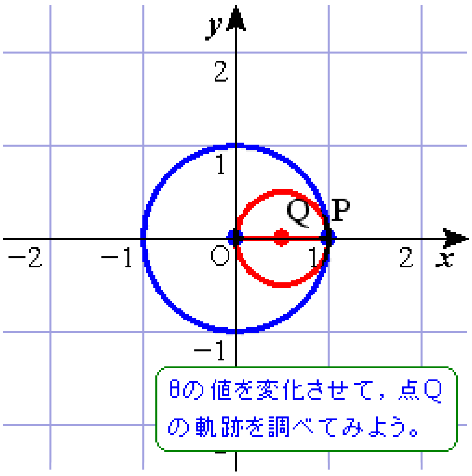
(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ としたとき、点 Q の軌跡の式を求めよ。さらにその軌跡を図示せよ。

(3) 円 S の面積を $D(\theta)$ とするとき、次の値を求めよ。

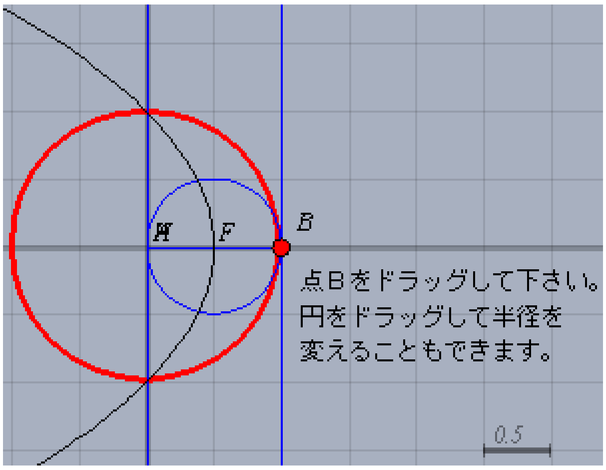
$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{D(\theta)}{\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)^2}$$

（２）で求める点Ｑの軌跡は、「円Ｃの内部の点で、定直線（y 軸）と円Ｃ上の点から等距離にある点」の軌跡を求めることに他ならない。この場合、軌跡は放物線になるのだが、それでは円Ｃの外部の点ならどうなるであろうか。このことを調べるために、Grapes と Cinderella で教材を作ってみた。

Grapes の場合



Cinderella の場合



Grapes の場合は、パラメータ θ を 0°から 90°まで変化させることにより、点Ｑの軌跡を調べることができる。同じ教材をそのまま使って θ の値を 90°から 180°まで変化させると、点Ｑは円Ｃの外部にくるが、この場合も点Ｑの軌跡は放物線（しかも点Ｑが円Ｃの内部にあるときの軌跡につながっている）になることが確認できる。

また Cinderella の場合は、点Ｐ（Cinderella 上では点Ｂ）を動かさなくても一気に点Ｑの軌跡を描くことができる。もちろん点Ｐを動かす（Grapes で θ の値を動かすことと同様）ことにより点Ｑの軌跡を確認することもできる。

さらに、Cinderella では円Ｃの半径を１以外に変化させても、点Ｑの軌跡が放物線になることを確認できる。これにより、一般的に**「定直線と円上の点から等距離にある点の軌跡が放物線になる」**ことがわかる。