

数Ⅲ 【微分法の応用】 最大値・最小値

2010 千葉大学 医学部（前期）【11】

$f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。実数 a に関する条件 (P) を考える。

(P) 正の実数 r を十分小さく選べば、 $|x-a|<r$ を満たすすべての実数 x に対して、 $f(x)\leq f(a)$ が成り立つ。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a が条件 (P) を満たし、かつ、 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、 $f'(a)=0$ であることを示せ。

(2) 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} |x| - x & (x < 1 \text{ のとき}) \\ |x^2 - 6x + 8| & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき、条件 (P) を満たすような実数 a の集合を決定せよ。

(2) 一般に、実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し、次の命題は正しいか。正しいければ証明し、正しくなければ反例を挙げよ。

(命題) すべての実数 a が条件 (P) を満たすならば、 $f(x)$ は定数関数である。

条件「正の実数 r を十分小さく選べば、 $|x-a|<r$ を満たすすべての実数 x に対して、 $f(x)\leq f(a)$ が成り立つ」の意味が理解し難い生徒に対して、実際に $f(x)$ (赤色)、 $f(a+r)$ 、 $f(a-r)$ (青色) を提示し、 r を小さくしていき、 $f(a+r)$ 、 $f(a-r)$ が $f(a)$ に収束していく様子を見せ、 $f(x)\leq f(a)$ が成り立つ a の範囲を a や r の値を変化させながら考えさせる。特に、 $a=0$ 、 $a=1$ 、 $a=2$ 、 $a=3$ 、 $a=4$ のときを確認したい。

