数Ⅱ　【三角関数】三角方程式

2011 山梨大学　工学部（前期）【１】

$0 \leqq \alpha \leqq \pi$、$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$　のとき、次の方程式を満たす α と θ を求めよ。

$$\begin{cases} 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha + 1 \leqq 0 \\ \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\cos\alpha \end{cases}$$

解答前半部分は　$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$　となる。

この結果を第２式に代入すると、$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

左辺を合成すると　$2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{2}{3}\pi$　に注意すると　$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4}$　　$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{12}$

この問題について、別解を考える。（合成をせずに解く）

数Ⅱ　【三角関数】三角方程式

2008 関西大学

$3\sin x + \cos x = c$、$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$　で異なる２つの解を持つような c の値の範囲を求めよ。

通常は合成して共有点を２点持つ c の範囲を求めるが、

ここでは　$\cos x + 3\sin x$　を　$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$

と内積として視覚的に異なる２つの解を求めることができる。

（解答）

$c = \cos x + 3\sin x = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$、$\vec{b} = \begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$　とおいて　$c = \vec{a}\cdot\vec{b}$　…①

$\vec{a}\cdot\vec{b}$　の始点を原点 O とすると、$\vec{b}$ の終点は半径１の円上に存在する。

（ただし、円は第１象限に限定する）

$B = B_1$　のとき、解ならば

B_1 の $\vec{a}$ に関する対称点 B_2 が円上にあれば $B = B_2$ のときも解。

よって c の範囲は

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \leqq c \leqq \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$\therefore$　$3 \leqq c \leqq \sqrt{10}$