数Ⅲ　【積分法】体積

2011 名古屋大学　理・工・農・医・情報文化（自然科学）学部（前期）【１】

$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形　$R_s=\{(x、y、0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s、1\leqq y\leqq 2-3s\}$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに１回転してできる立体を K_s とする。

(1) 立体 K_s の体積 V_s が最大となるときの s の値、およびそのときの V_s の値を求めよ。

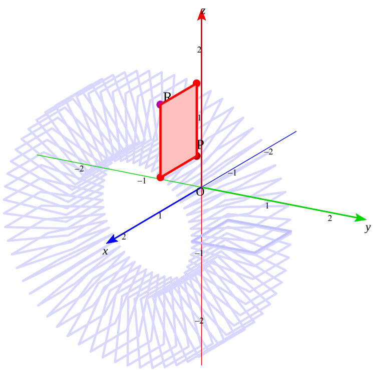
(2) s を (1) で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに１回転してできる立体 L の体積を求めよ。

(1) では体積 V_s が最大となるときの s の値を求めると $s=0$ となる。そこで (2) では $s=0$ として考える。

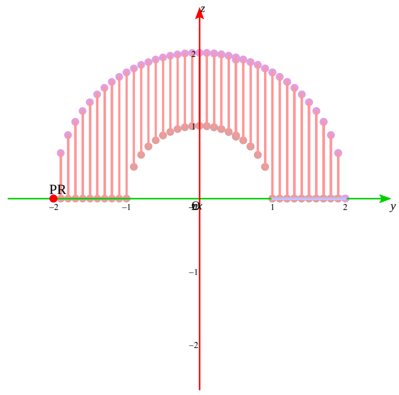
まず、図１のように長方形 R_s を x 軸のまわりに１回転して立体 K_s（図の輪の部分）を作る。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに１回転して体積を求めるのだが、そのためにまず断面積を調べる必要がある。

K_s を y 軸に垂直に切ったときの断面のうち、z 座標が０以上の部分を長方形で表すと、図１の色が塗られた長方形となり、その長方形の集合体を x 軸の正の方向から見たものが図２である。図２より $0\leqq y\leqq 1$ の部分と $1\leqq y\leqq 2$ の部分では、長方形の下の部分を表す式が違うことが分かる。そのため、体積を計算するときは２つに分けて計算する必要があることが分かる。

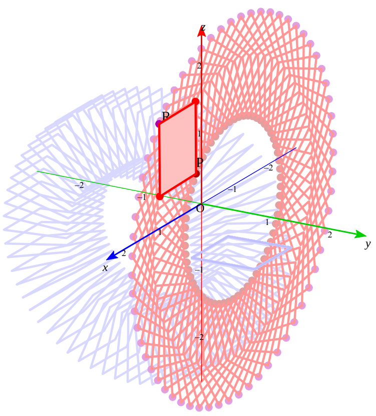
次に、この長方形を y 軸のまわりに１回転したものが図３である。これを y 軸方向から見ると、上で場合分けをしたどちらの部分も回転軸より一番遠いものが図の点 R、一番近いものが点 P であることが分かる。これらを参考にして回転体の面積を求めることができる。



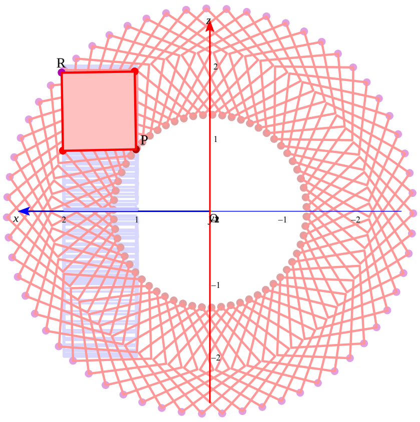
【図１】



【図２】



【図３】



【図４】（図３を y 軸方向から見たもの）