

数Ⅲ 【積分法の応用】面積

2012 上智大学 理工学部（B方式）【3】

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。底面 ABC の内接円の半径を r とおき、頂点 O を通り底面 ABC に垂直な直線からの距離が r 以下である点からなる円柱を T とする。

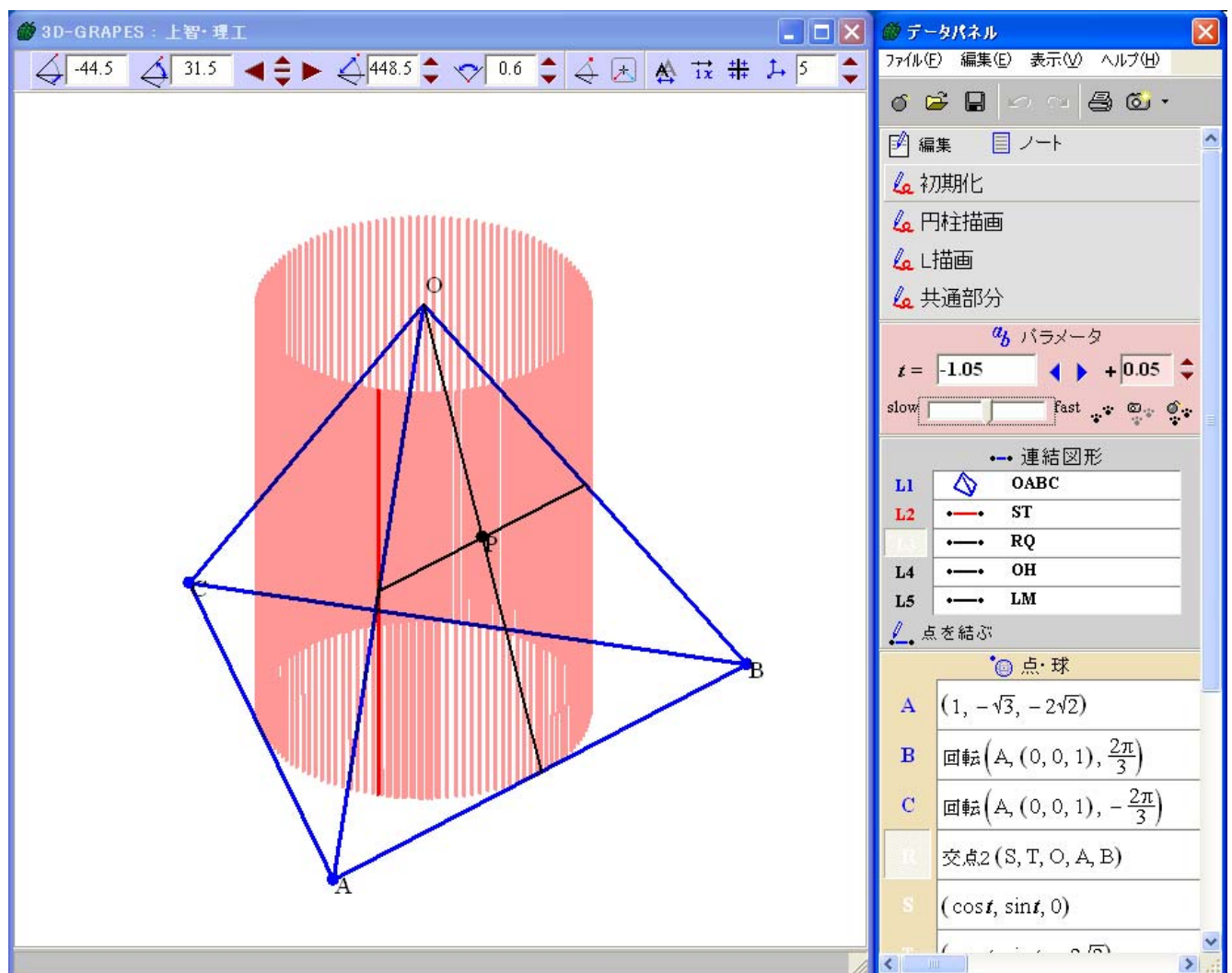
(1) $r = ()$ である。

(2) 正四面体 $OABC$ の高さは $()$ である。

(3) 辺 AB の中点と頂点 O とを結ぶ線分上に点 P をとり、 $x = OP$ とおく。 P を通り底面 ABC に平行な平面による側面 OAB の切り口を L とする。 L が T に含まれるような x 最大値を x_1 とすると、 $x_1 = ()$ である。

$x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 L と T の共通部分の長さは $()$ である。

正四面体 $OABC$ で T の含まれる部分の面積は $()$ である。

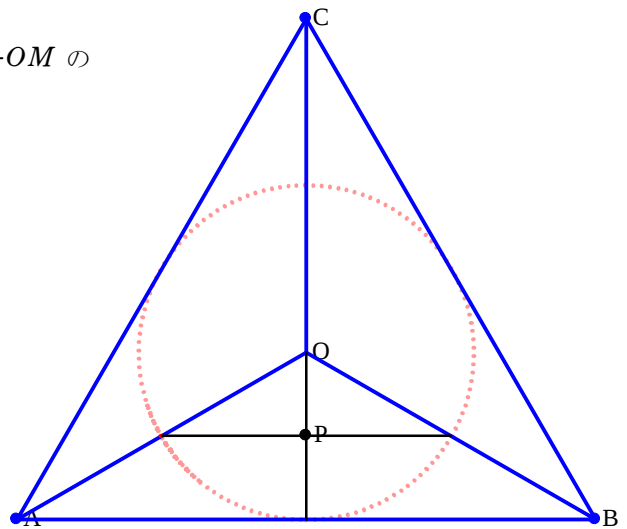


まず、正四面体と円柱の位置関係を確認し、 L を描画する。パラメータ t を変化させることで x_1 の値を求める方法がわかる。また、特定の側面について共通部分を描画することでその形を具体的にみることができ、視点を変えることで、積分の方向、被積分関数の計算をしやすく。

(3) において、 AB の中点を M とおくと $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、

真上からみた正射影では L が T に含まれるのは $OP \leq \frac{1}{2}OM$ の

ときであることが容易に理解できる。

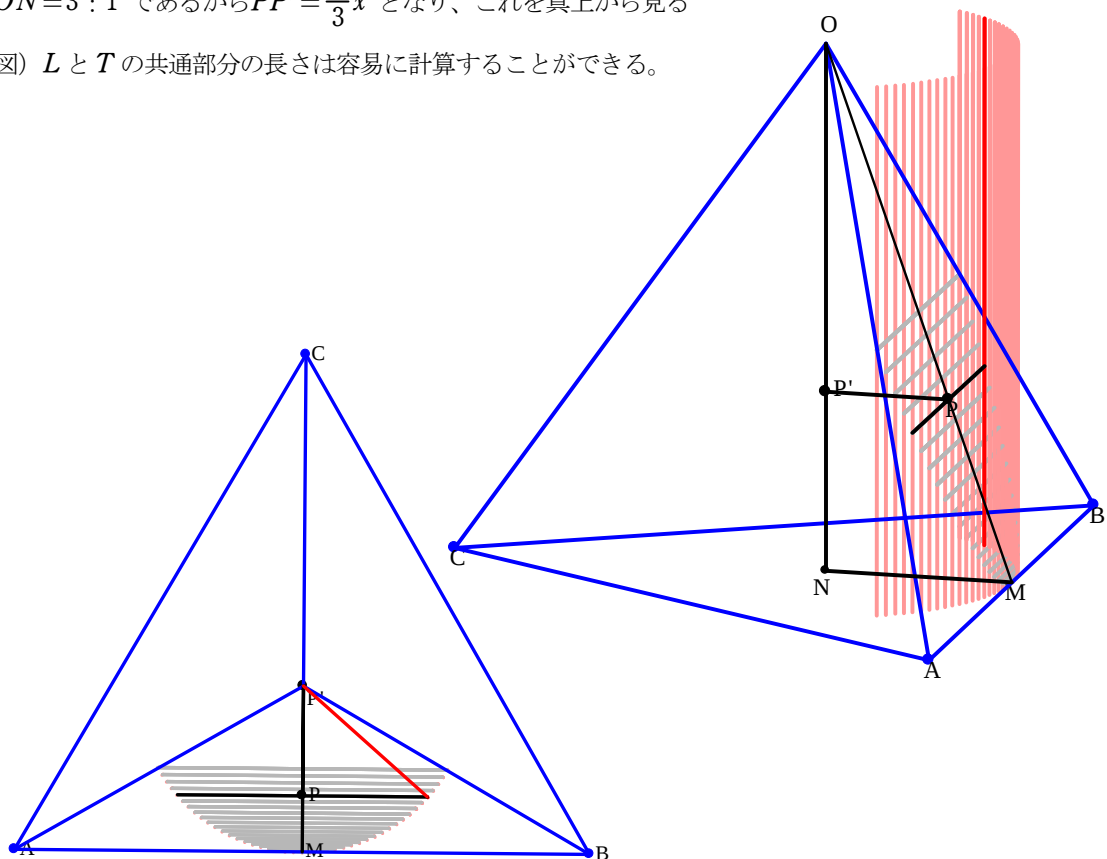


また、 L と T の共通部分は渦のように表される。

O から底面に下ろした垂線の足（＝三角形 ABC の内接円の中心）を N とおき、 P から ON に下ろした垂線の足を P' とする。

$OM : ON = 3 : 1$ であるから $PP' = \frac{1}{3}x$ となり、これを真上から見る

と（下図） L と T の共通部分の長さは容易に計算することができる。



このように、3D-GRAPES では回転させたり視点を変えたりすることが容易なので、立体の位置関係をとらえたり、正射影で考えたりする場面において非常に役立つ。