

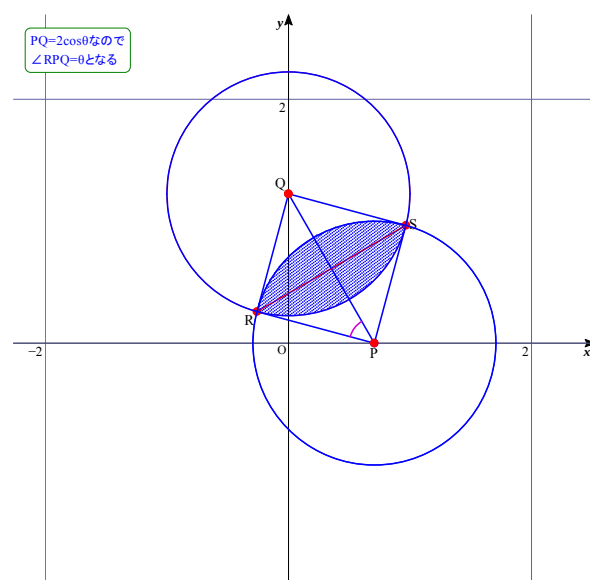
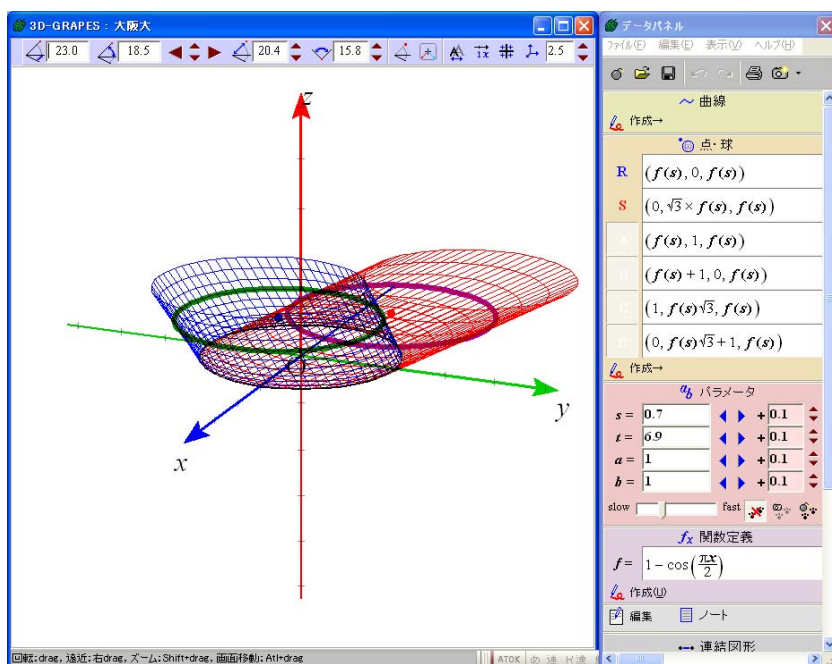
数Ⅲ 【積分法の実用】体積

2012 大阪大学 理・医（保健（看護を除く）・歯・薬・工・基礎工学部（前期）【3】

xyz 空間に3点 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(1, 0, 1)$ 、 $B(1, \sqrt{3}, 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ、中心が O 、半径が1の円を W とする。点 P が線分 OA 上を、点 Q が円 W の周および内部を動くとき、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を、点 Q が円 W の周および内部を動くとき、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$ を満たす点 R 全体が作る立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 平面 $z = \cos \theta$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ で表せ。
- (2) 立体 V の体積を求めよ。

立体の切り口をイメージするには 3D-GRAPES は威力を発揮する。
しかし、切り口の様子が分かったあとは GRAPES の方が見やすい。
立体を切り口の平面でとらえるよい題材といえる。



数Ⅲ 【積分法の応用】体積

2012 大阪大学 理・医（保健（看護を除く）・歯・薬・工・基礎工学部（前期）【3】

xyz 空間に3点 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(1, 0, 1)$ 、 $B(1, \sqrt{3}, 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ、中心が O 、半径が1の円を W とする。点 P が線分 OA 上を、点 Q が円 W の周および内部を動くとき、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を、点 Q が円 W の周および内部を動くとき、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ を満たす点 R 全体が作る立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 平面 $z = \cos \theta$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ で表せ。
- (2) 立体 V の体積を求めよ。

パラメータ t を動かすことで点 P が、パラメータ r, u を動かすことで点 Q が動きます。

パラメータ t を固定して、 V_A, V_B の断面の大体の概形をつかんだら、 V_A, V_B の断面を表示させ、パラメータ t を動かすことで、立体の概形がある程度つかめます。

