数Ⅲ 【積分法の応用】体積

2012 お茶の水大学 理・文・教育・生活科学部（前期）【６】

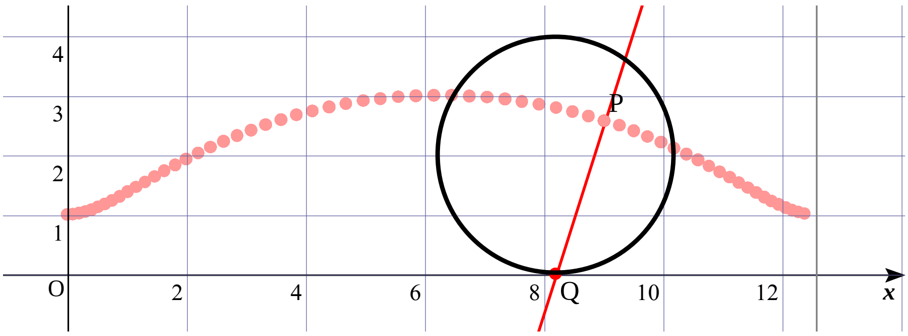
半径２の円板が x 軸上を正の方向に滑らずに回転するとき、円板上の点 P の描く曲線 C を考える。
円板の中心の最初の位置を（０、２）、点 P の最初の位置を（０、１）とする。

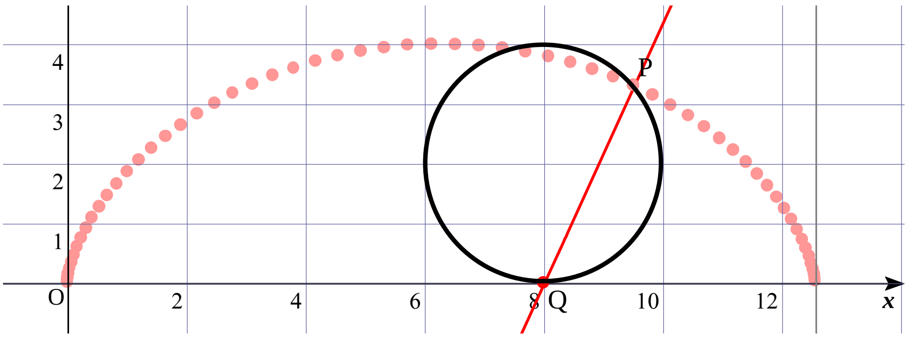
(1) 円板がその中心の周りに回転した角を θ とするとき、P の座標は $(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ で与えられることを示せ。

(2) 点 $P(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ における曲線 C の法線と x 軸との交点を Q とする。
線分 PQ の長さが最大になるような点 P を求めよ。ここで、P において接線に直交する直線を法線という。

(3) 曲線 C と x 軸、２直線 $x=0$、$x=4$ で囲まれた図形を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

（２）において計算をする点 Q の x 座標は円板の中心と等しくなり、すなわち円板が x 軸に接する点となる。GRAPES で作図してみると一目瞭然である。このような性質がトロコイドにあるのなら、サイクロイドでも同じであり、より直感的である。





ちなみにこの問題のように長さが最小であるところを調べるときは、その線分そのものを描くのはもちろん、線分（この場合は PQ）が直径となる円を動じに描画すると直感的に分かりやすいものとなる。