

数Ⅰ 【2次関数】2次関数の最大・最小

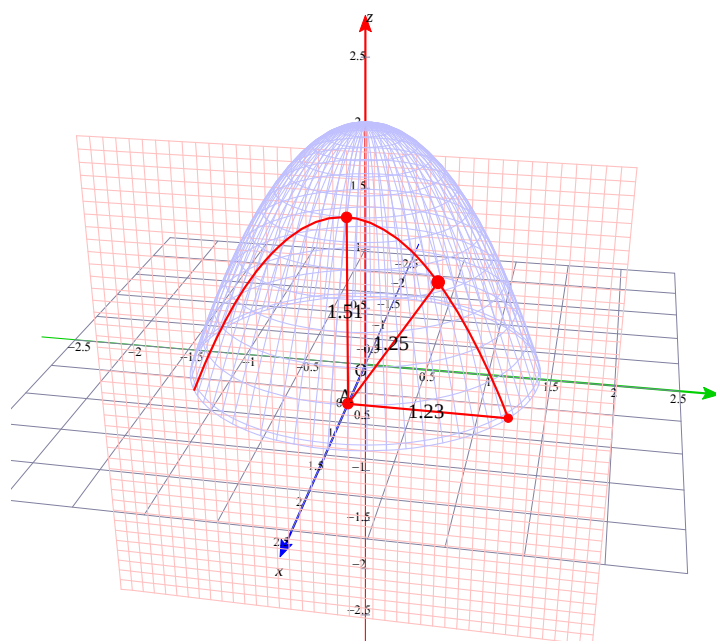
数Ⅱ 【微分法と積分法】定積分

2013 埼玉大学 教育・経済学部（前期）【4】

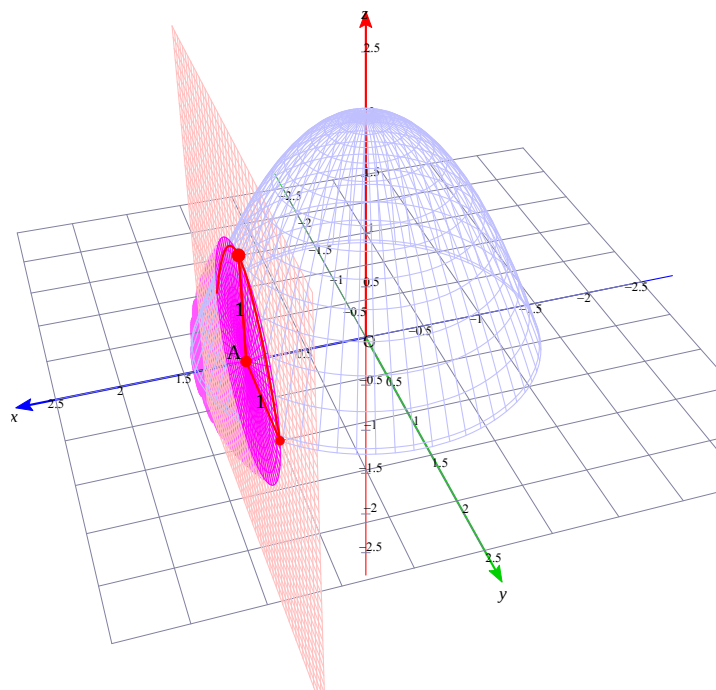
xyz 空間における平面 $y=0$ 上のグラフ $z=2-x^2$ 、($0 \leq x \leq \sqrt{2}$) を z 軸の周りに回転して得られるものを平面 $x=a$ で切りとる。ただし $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ とする。そのとき切り口の平面に曲線 G が現れた。 G 上の点 (x, y, z) は $x=a$ 、 $z=2-a^2-y^2$ 、($-\sqrt{2-a^2} \leq y \leq \sqrt{2-a^2}$) を満たす。切り口の平面 $x=a$ 上において点 $(a, 0, 0)$ と曲線 G 上の点の距離の最大値を $r(a)$ とする。

(1) $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ に対して $r(a)$ を求めよ。

(2) 積分値 $\pi \int_1^{\sqrt{2}} \{r(x)\}^2 dx$ を求めよ。



(1) 左の図の赤い放物線が曲線 G である。GRAPES 上では実際に曲線 G 上の点をドラッグしながら長さを表示させると、実際に $a=1$ までは放物線の頂点が、 $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ では曲線 G の端点において、最も点 $(a, 0, 0)$ からの距離が大きくなるのがわかる。



(2) $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ において、 $\pi r(a)^2$ は、 $r(a)$ 、すなわち点 $(a, 0, 0)$ と曲線 G の端点を結ぶ線分を半径とする円の面積に等しい。

よって、求める積分値は、それに $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ の間で足し合わせたものに等しく、左の図のマゼンタの立体の体積に等しい。これは原点を中心とし、半径 $\sqrt{2}$ の球の一部分である。