

数 I 【図形と計量】空間図形の計量

2013 名古屋市立大学 医・芸術工学部（前期）【4】

原点を O とする xyz 空間内に 1 辺の長さが 1 の正四面体 $OPQR$ がある。点 P, Q, R を通り z 軸に平行な 3 直線と xy 平面との交点をそれぞれ P', Q', R' とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle PQR, \triangle P'Q'R'$ の面積をそれぞれ S, S_1 とする。 P, Q, R の 3 点を通る平面と xy 平面のなす角を θ とするとき、 $S_1 = S|\cos \theta|$ を示せ。
- (2) O が $\triangle P'Q'R'$ の周上を含む内部にあるとき、 z 軸と $\triangle PQR$ の交点を A とする。このとき正四面体 $OPQR$ の体積 V は $V = \frac{1}{3}OA \cdot S_1$ となることを示し、 S_1 の最小値を求めよ。
- (3) O が $\triangle P'Q'R'$ の外部にあり、線分 OP' と線分 $Q'R'$ が交点 B をもつとき、点 B を通り z 軸に平行な直線と、直線 OP および直線 QR との交点をそれぞれ C, D とする。このとき四角形 $OQ'P'R'$ の面積を S_2 とすると $V = \frac{1}{3}CD \cdot S_2$ となることを示し、 S_2 の最大値を求めよ。

図形をイメージするのが難しい問題なので、解説するときに 3D-GRAPES を使うとイメージする足掛かりになる。

実際に正四面体を動かして原点と $\triangle P'Q'R'$ との関係を見ることができる。(2)と(3)ではどのように正四面体の位置が変わっているかなど、頭の中だけで把握するのは難しいと思われる。

