

数Ⅱ 【図形と方程式】 軌跡

2013 電気通信大学 情報理工学部(前期)【4】

座標平面上の2つの直線 l, m を、それぞれ

$$l: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, \quad m: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

とし、 l 上に点 $A(\sqrt{3}s, s)$ を、 m 上に点 $B(\sqrt{3}t, -t)$ をとる。ただし、 $s > 0, t > 0$ とする。さらに、正三角形 ABC を、頂点 C が直線 AB に関して原点と同じ側になるように定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 O, A, B, C が同一直線上にあることを示し、点 C が y 軸上にあることを証明せよ。
- (2) 点 C の座標を s, t の式で表せ。
- (3) 点 $D(X, Y)$ を、直線 AB に対して点 C と対称な点とする。このとき、 X と Y をそれぞれ s, t の式で表せ。
- (4) 線分 AB の長さを s, t の式で表せ。
- (5) 点 A, B が線分 AB の長さを $\sqrt{3}$ に保ちながら動くとき、点 D の軌跡を求めその概形を図示せよ。

ここでは、(5)の「点 D の軌跡」を取り上げる。問題そのものはパラメータを用いた軌跡の問題なので、(4)までで求めた結果を用いて、計算だけで答えを出すことができる。

ところで、「点 A, B が線分 AB の長さを $\sqrt{3}$ に保ちながら動く」とあるが、これをグラフ上で再現しようとする、線分 AB はどのように動くだろうか。この動きを、2通りの方法で考えてみた。

1つ目は、 l 上にある点 A を原点から順に右上に移動させてそれぞれの各図形及び点 D の動きを追う方法である(図1)。ここで気をつけなければならないのは、

点 A の x 座標が $\frac{3}{2}$ を超えると、対応する点 B が2つ存在すること……①

である。Grapes では2つ目の点 B を1つ目と色を変え、区別することにした。

もう1つは、 x 軸と線分 AB のなす角を 30° から 150° まで変化させ、それぞれの各図形及び点 D の動きを追う方法である(図2)こちらの方が直感的にはわかりやすいと思う。スクリプトを動かすと、点 A が $\theta = 120^\circ$ を境に逆方向に動くことがわかる。この動きが1つ目の①に対応することがわかる。

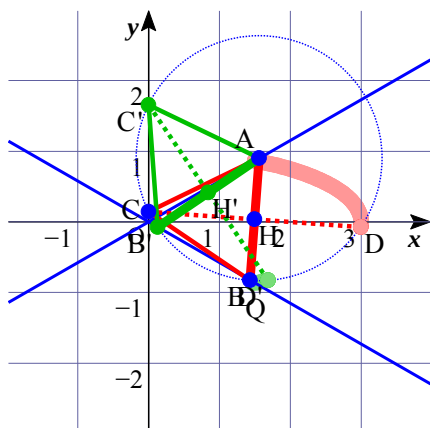


図1(点 A の x 座標を変化)

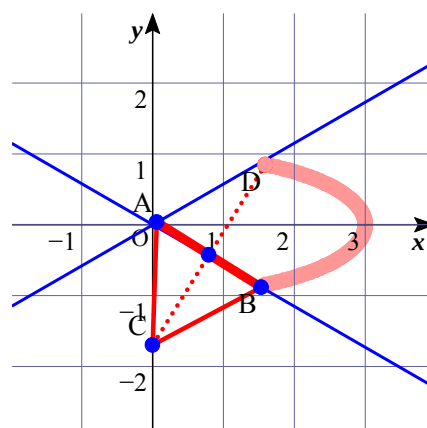


図2(x 軸と線分 AB のなす角を変化)