

数Ⅱ 【微分法と積分法】折線・法線

2013 関西学院大学 理工

放物線 $C: y = x^2$ に点 (p, q) から 2 本の接線 l, m が引けるとする。また l, m と C の接点をそれぞれ $A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$) とする。

- (1) 2 本の接線が引けるような p, q の満たす条件を求めよ。また $\alpha + \beta, \alpha\beta$ を p, q を用いて表せ。
- (2) 2 点 A, B 間の距離を p, q を用いて表せ。
- (3) l と m が垂直であるような q の値を求めよ。
- (4) q が上の (3) で求めた値より小さいとき、 l と m のなす角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) の正接 $\tan \theta$ を p, q を用いて表せ。

2 本の接線が引ける領域は $y < x^2$ であり、2 本の接線が直交するときの q の値が一定になることは容易にわかる。

一般に $x^2 = 4ky$ において (p, q) を通る接線が 2 本あるとき、その接線は x 軸には垂直でないので、

$y = m(x - p) + q$ とすることができる。連立した、 $x^2 - 4kmx + 4kmp - 4kq = 0$ の判別式 D で、

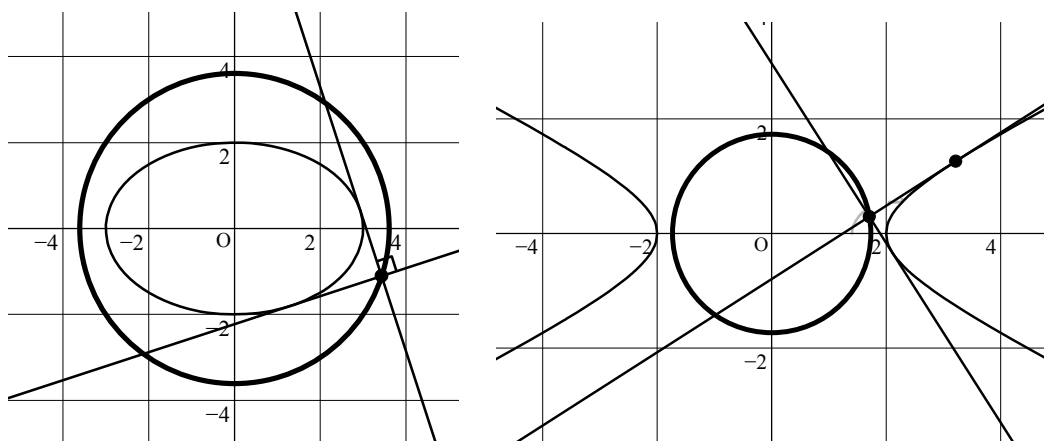
$$\frac{D}{4} = 4k^2m^2 - 4kmp + 4kq = 4k(km^2 - mp + q) = 0, \quad k \neq 0 \text{ なので、} km^2 - mp + q = 0 \text{ の 2 つの解を}$$

m_1, m_2 とすれば、解と係数の関係より $m_1m_2 = \frac{q}{k}$ 。一方 2 本の接線は垂直なので $m_1m_2 = -1$ が成り立

つので $\frac{q}{k} = -1$ より $q = -k$ 即ち (p, q) は準線 $y = -k$ 上にあることが分かる。

このような美しい性質は他の 2 次曲線も持っており、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に引いた直交する 2 接線の交点

は円 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上、双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) においては円 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 上となる。



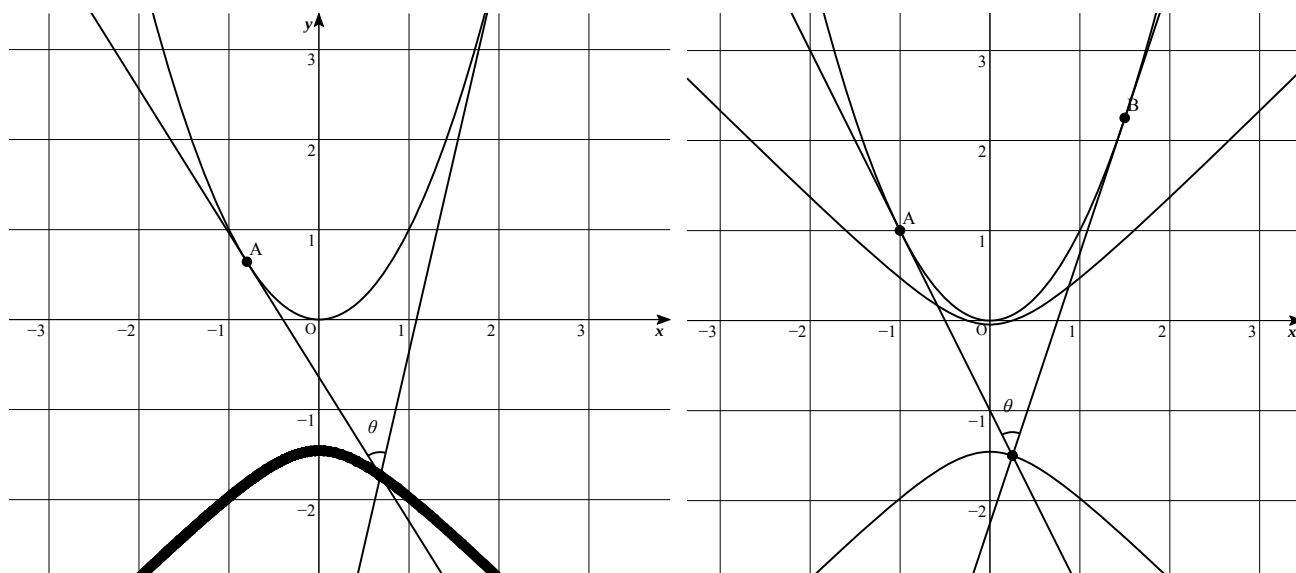
ところで(4)のなす角 θ であるが、A, B における接線の傾きがそれぞれ $2\alpha, 2\beta$ であることを考えれば、

$$\tan \theta = \left| \frac{2(\alpha - \beta)}{1 + \alpha\beta} \right| \text{ であり、 } p, q \text{ で表すと } q < -\frac{1}{4} \text{ であることから } \tan \theta = -\frac{4\sqrt{p^2 - q}}{1 + 4q} \text{ となる。}$$

このとき、逆に角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) を固定すれば、2つの接線のなす角 θ が一定となる場合の交点の軌跡を

考えることができる。これは $\tan \theta = c (> 0)$ とすれば、 $c = \left| \frac{4\sqrt{p^2 - q}}{1 + 4q} \right|$ を平方して整理すると

$$p^2 - c^2 q^2 - \left(\frac{c^2}{2} + 1 \right) q - \frac{c^2}{16} = 0 \text{ 即ち双曲線 } x^2 - c^2 y^2 - \left(\frac{c^2}{2} + 1 \right) y - \frac{c^2}{16} = 0 \text{ となることが分かる。}$$



$\tan \theta = 1$ の場合