愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

数Ⅲ 【微分法の応用】最大値・最小値

2013 信州大学 経済・理(数理・自然情報科学)・医学部(前期)【６】

a を定数とする。放物線 $y=a-x^2$ の接線のうち，原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ。また，そのときの距離を求めよ。

放物線上の点 $(t, a-t^2)$ における接線の方程式は $y=-2t(x-t)+a-t^2$ となるため，点と直線の距離の公式を用いてこの接線と原点の距離を L とおくと，

$$L^2=\frac{(t^2+a)^2}{4t^2+1}$$

となる。この式を $f(t)$ とおいて最小値とそのときの t の値を求めればよい。

$$f'(t)=\frac{8t(t^2+a)}{(4t^2+1)^2}\{t^2-(a-\frac{1}{2})\}$$

とその上の式より， $a \leqq 0, 0<a \leqq \frac{1}{2}, a>\frac{1}{2}$ で場合分けすればよいことが分かる。

［1］ $a \leqq 0$ のとき，原点を通る接線が存在するため，距離の最小値は 0 となる(図１)。

［2］ $0<a \leqq \frac{1}{2}$ のとき，放物線の頂点を通る接線からの距離が最小となる(図２)。

［3］ $a>\frac{1}{2}$ のとき，放物線の頂点を通る接線よりも近い接線が存在する(図３)。

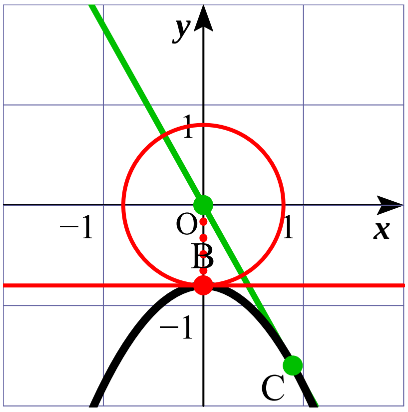

図１ $a=-0.8$ のとき

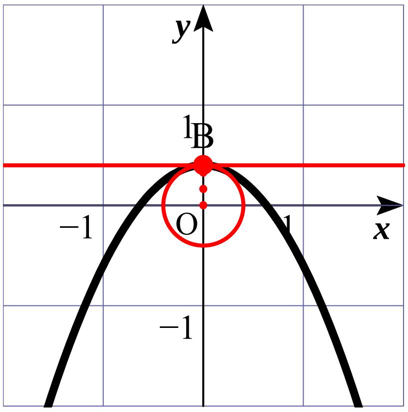

図２ $a=0.4$ のとき

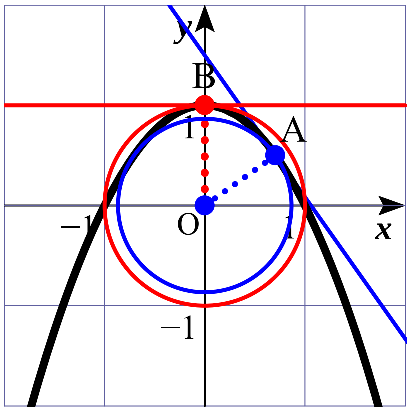

図３ $a=0.8$ のとき

GRAPES を用いてこれらのグラフを表示すると，３つに場合分けをすることの必要性が理解できる。また， $a \geqq 0$ のときは最小値が接点からの距離(すなわち放物線上の点からの距離の最小値に対応)になっているが， $a<0$ のときは接点からの距離ではないことを確認することができる。