

数Ⅲ 【積分法の応用】 体積

2013 大阪大学 理・医・歯・薬・工・基礎工学部(前期) 【4】

xyz 空間内の 3 点 $O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転してできる円すいを V とする。円すい V を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

まず三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転するとできる円すい V を考えると、 V を表す式は

$$y^2 + z^2 \leq x^2 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq x \leq 1$$

となる。この円すいを y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めるために、まずはこの立体を平面 $y = u$ で切った断面を考える。直円すいを軸に平行な平面で切るわけだから、この断面の形は双曲線と線分で囲まれたもの(図 1 の太線部)になる。この断面を y 軸のまわりに 1 回転させると

- ・外径が「双曲線と線分の交点」と原点を結ぶ線分
- ・内径が「双曲線の中点」と原点を結ぶ線分

となるドーナツ型(図 2)となる。パラメータ u を 0 から 1 まで変化させても、この性質は保持される。

3D-GRAPES を使ってこれらの図形を表示することにより、問題の理解を深めることができる。

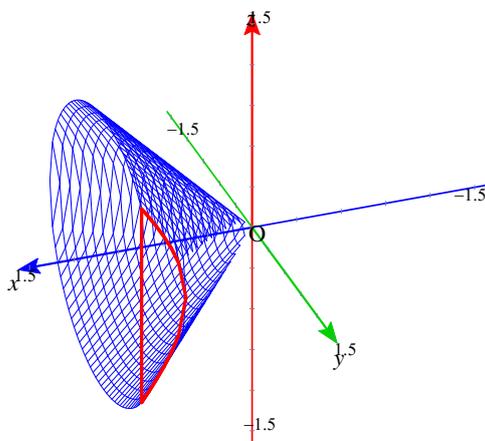


図 1 円すいを平面 $y = 0.7$ で切った時の断面図

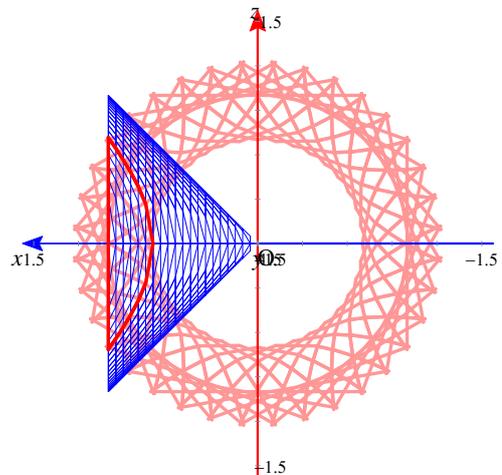


図 2 断面の回転体を y 軸方向から見た図