

数C 【いろいろな曲線】 楕円

2013 慶應義塾大学 理工学部【1】

座標平面上において、方程式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 12$ で表される図形 C を考える。行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ を

用いると、この方程式は $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 12$ と表せる。

$0 < \theta < \pi$ である θ を用いて、 $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ と表される行列 P が、ある実数 α, β ($\alpha < \beta$)

に対し、 $AP = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき、 $\theta = [\quad]$ であり、 $\alpha = [\quad]$ 、 $\beta = [\quad]$ である。

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とおくと、図形 C の方程式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 12$ は $\frac{s^2}{[\quad]} + \frac{t^2}{[\quad]} = 1$ となる。

図形 C 上の 2 点間の距離の最大値は $[\quad]$ であり、この最大値を与える図形 C 上の 2 点の座標は $[\quad]$ と $[\quad]$ である。

方程式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 12$ が楕円の回転を表していることを誘導に従って読みとる問題である。

(2 次曲線を対称行列で表し、その固有値、固有ベクトルから形を調べることを「2 次曲線の標準化」といわれている。)

方程式 $ax^2 + 2bxy + dy^2 = r$ の各係数値の変化でのグラフの動きや行列の 1 次変換で表されるベクトル場の様子を geogebra で表示すると、特に固有値、固有ベクトルの意味について理解しやすい。

