愛知県高等学校数学研究会
数 学 科 教 育 情 報 委 員 会

数Ⅱ　【図形と方程式】直線と円

2014 関西医科大学　医学部（前期）【4】

xy 平面上に，円 $C : x^2 + y^2 = 16$ をとる。点 $\mathrm{A}(0,\ -2)$ と，円 C 上の点 $\mathrm{P}(4\cos\theta,\ 4\sin\theta)$ とを両端とする線分 AP の垂直二等分線を l とする。

(1)　l の方程式を書き下すと，$\boxed{\text{ヌ}}$ となる。

(2)　実数 x，y を与えたとき，括弧ヌの式を満たす実数 θ が存在しないための必要十分条件を，x，y の式として書き表すと，$\boxed{\text{ネ}}$ となる。

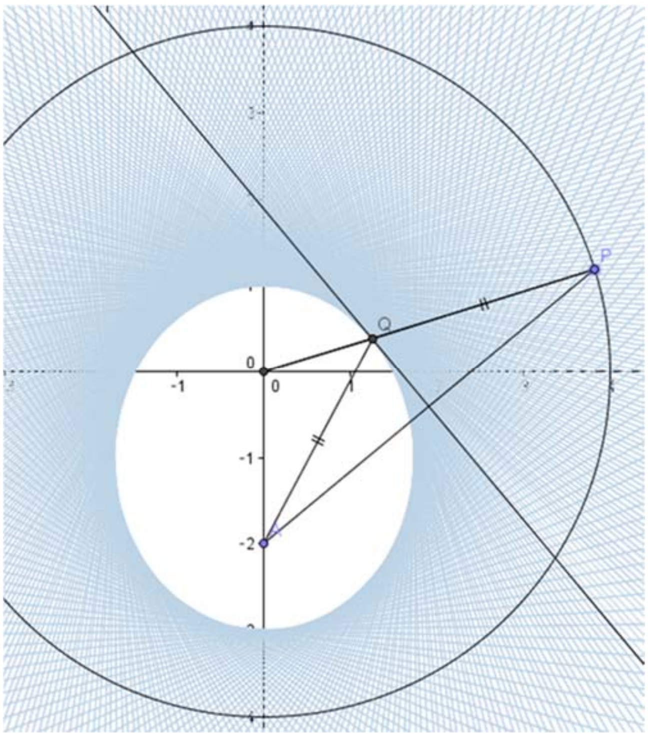
(3)　点 P が円 C 上を一周するとき，直線 l が通過しない領域の面積は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

直線の通過領域を考える問題である。l の方程式は $(2\cos\theta)x + (2\sin\theta + 1)y - 3 = 0$ となり，θ の存在条件を計算していけば，領域の境界が楕円 $4x^2 + 3y^2 + 6y - 9 = 0$ となることが分かる。

楕円と接線の性質を考えれば幾何的にも説明できる。原点を O として，直線 OP と l の共有点を Q とすれば，点 Q の軌跡が点 O，A を焦点とする楕円となり（距離の和が円 C の半径に一致），直線 l はその楕円の点 Q における接線になっている。よって問題で考えている領域の境界は，点 Q の軌跡である楕円に一致することが分かる。

ちなみに，点 A が円 C の外部にあれば，領域の境界は双曲線になる。

【点 A が円 C の内部】



【点 A が円 C の外部】