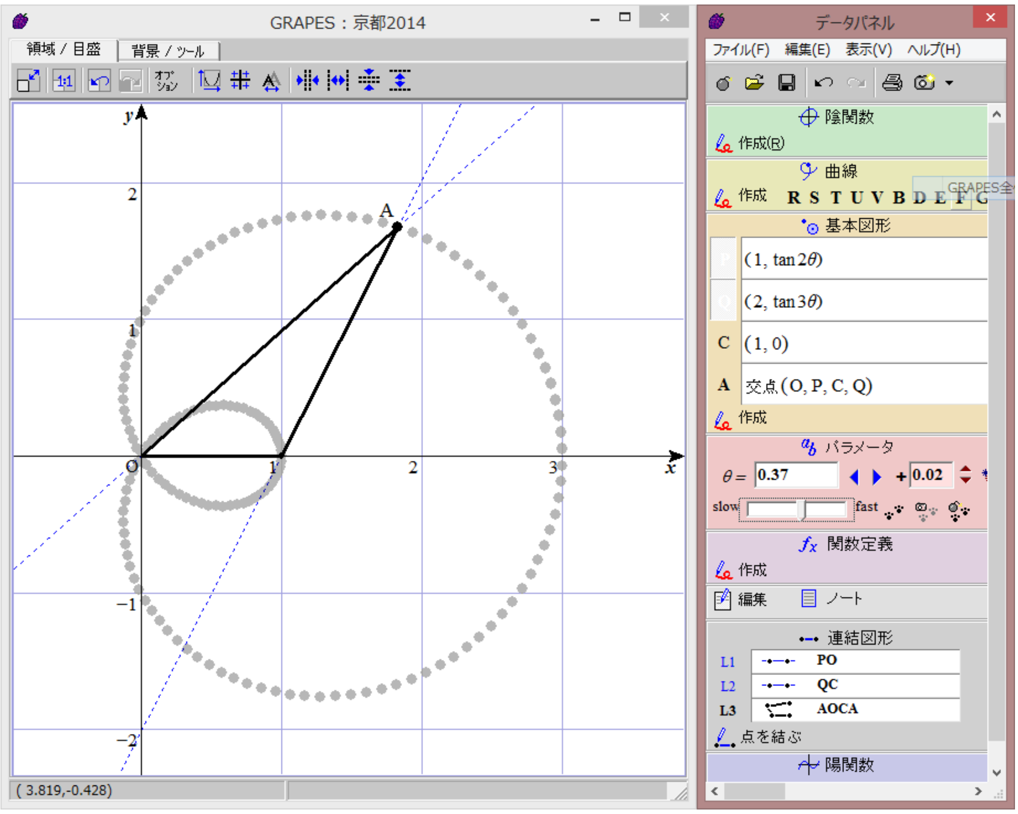
愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

数Ⅱ 【微分法と積分法】面積

2014 京都大学　理系【３】

△ＡＢＣは，条件∠Ｂ＝２Ａ，ＢＣ＝１を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，ｃｏｓ∠Ｂを求めよ．

Grapes で描くなら、B $(0,0)$, C $(1,0)$ とし、 $y=(\tan\theta)x$ と $y=(\tan 3\theta)(x-1)$ にあたる直線を引いて、その交点をＡとすればよい。このとき点Ａの軌跡を描き、ｙ座標が最も大きくなるところが△ＡＢＣの面積を最大にする。θ を０からπまで変化させれば、点Ａの軌跡はリマソン曲線を描くことがわかる。



問題を解くには点Ａ (x,y) は正弦定理よりＡＢ＝$\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=3-4\sin^2\theta=2\cos 2\theta+1$ であるから

$$x=(2\cos 2\theta+1)\cos 2\theta\,,\quad y=(2\cos 2\theta+1)\sin 2\theta$$

であり、三角形の成立する $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ において y が最大になる時の 2θ を求めればよい。

因みにこの式を $t=2\theta$ とおいて変形すると、

$$x=\cos t+\cos 2t+1\,,\quad y=\sin t+\sin 2t$$

となる。