# 2 次のベジェ曲線は放物線

ベジェ曲線（ベジエ曲線, Bèzier Curve）はシトロエン社のド・カステリョ (Paul de Casteljau) とルノー社のピエール・ベジェ (Pierre Bèzier) により独立して考案された．カステリョが先に考えたが，ベジェのあとでその論文が認められたためベジェの名がついている．両者とも自動車メーカーの技術者というのが面白い．

ベジェ曲線は次のように定義される．

**定義 1** $n$ **次のベジェ曲線**

$n+1$ 個の点をベクトルで与え，$A_0, A_1, A_2, \cdots A_n$ とする．このとき次の式で表される点 $X$ の軌跡をベジェ曲線と呼ぶ．$t$ は媒介変数である．

$$X = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k t^k (1-t)^{n-k} A_k$$

2 次の場合は

$$X = t^2 A_0 + 2t(1-t)A_1 + (1-t)^2 A_2 \tag{1}$$

と表される．この曲線は当然 2 次曲線となるが，その中でも放物線に限られる．そのことを確かめてみよう．

2 次元空間で考えることにしよう．(1) を成分に分解すると，

$$\begin{cases} x = at^2 + bt + c & (2) \\ y = dt^2 + et + f & (3) \end{cases}$$

となるが，話を簡単にするために 2 次の係数を 1 として，

$$\begin{cases} x = t^2 + bt + c & (4) \\ y = t^2 + et + f & (5) \end{cases}$$

としても，曲線の種類を論じるにあたって特に問題ない．いささか乱暴ではあるが，さらに適当に平行移動して $t=0$ のときに $(x, y) = (0, 0)$ となるようにしても問題ない．よって

$$\begin{cases} x = t^2 + bt & (6) \\ y = t^2 + et & (7) \end{cases}$$

一次変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

をほどこせば

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + bt \\ (e-b)t \end{pmatrix}$$

つまり

$$X = \left( \frac{Y}{e-b} \right)^2 + b \left( \frac{Y}{e-b} \right)$$

となり放物線であることがわかる．つまりベジェ曲線は楕円や双曲線にはなり得ないのである（もちろん直線にはなりうる）．またこの放物線は直線

$$\frac{ax}{t} + \frac{by}{1-t} = 1$$

の包絡線などと同じたぐいのものである．

さて，適当に 3 点を与えれば放物線たるベジェ曲線になるわけだが，その頂点はいったいどこにあるであろうか．これを詳らかに調べることは別の機会にすることにして，頂点が三定点を頂点とする三角形の外にあるのか中にあるのかを問題にしてみよう．

**問題 1** $A, B, C$ の順に定点を与えたとき，この三点によるベジェ曲線である放物線の頂点が $\triangle ABC$ の内部に含まれる条件を $\triangle ABC$ の辺の長さあるいはその角の大きさを用いて表せ．

［解］概略を示す．結論から言えば，$AC$ の中点を $M$ とすると，$\angle ACM < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle BCM < \dfrac{\pi}{2}$ であることが必要十分である．一定の傾きの直線を平行移動してゆき，頂点が三角形の外に出るのはどの状態かを図 1 に示す．

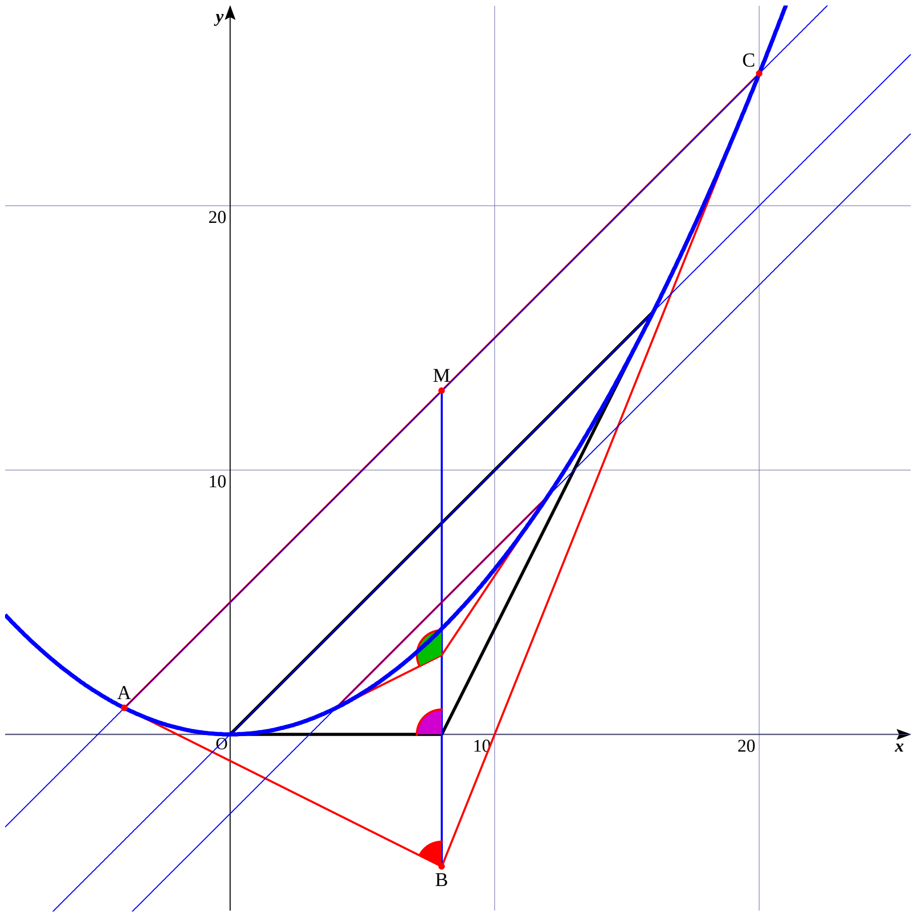


図 1

言い換えると $\triangle ABC$ の内部に放物線の頂点があるような条件は図 2 に示す斜線の部分以外の領域に点 $B$ が存在することである．

少し無理をして，$\triangle ABC$ の辺の長さだけで条件を表すこともできる．点 $A, B, C$ の対辺をそれぞれ $a, b, c$ とすると，

$$a^2 + 3c^2 > b^2 \quad \text{and} \quad 3a^2 + c^2 > b^2$$

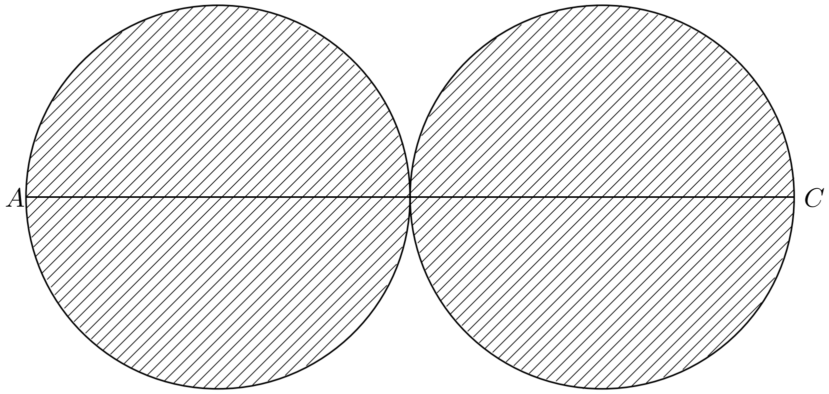

図 2

である．双方がともに負になることは無いので

$$(a^2 + 3c^2 - b^2)(3a^2 + c^2 - b^2) > 0$$

としてもよい．

## 参考文献


[1] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>