集合の濃度

potency, cardinality

定義 1 集合 A について $\exists n \in \boldsymbol{N}$ に対して，A と $1, 2, 3, \cdots, n$ の間に全単射写像が存在するとき，A を**有限集合 (finite set)** という．

定義 2 集合 A について $\forall n \in \boldsymbol{N}$ に対して，A と $1, 2, 3, \cdots, n$ の間に全単射写像が存在しないとき，A を**無限集合 (infinite set)** という．

定義 3 $\boldsymbol{N}$ との間に全単射写像が存在する集合を**可付番集合 (可算集合,countable set)** という．

例 1 自然数の中で偶数全体の集合

$$N_2 = \{m \mid m = 2n, n \in \boldsymbol{N}\}$$

は可付番集合である．

定理 1 可付番集合 $M = \{m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n, \cdots\}$ の無限部分集合 M' は可付番集合である．

［証明］

$$M' = \{m_{n_1}, m_{n_2}, m_{n_3}, \cdots\}(n_1 < n_2 < n_3 \cdots)$$

とすると，この番号 $n_1, n_2, n_2 \cdots$ は無限に続く．もし有限で終わってしまうと，無限部分集合であるという仮定と矛盾する．さて，この M' の要素の番号を付け直すと，

$$M' = \{m'_1, m'_2, m'_3, \cdots\}$$

となり，M の元に $\boldsymbol{N}$ と一対一の上への対応がつく（全単射である）ので可付番集合である． ［証明おわり］

定理 2 A, B が可付番集合ならば，$A \cup B$ も可付番集合である．

［証明］$A \cap B = \phi$[*1]の場合．

A, B は可付番集合なので，

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots\}$$

と番号をつけることができる．

$$A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots\}$$

であるが，$x_{2n-1} = a_n, a_{2n} = b_n$（つまり奇数番目は a_n から，偶数番目は b_n からとる）とすると

$$A \cup B = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$$

と番号を付けることができるので，可付番集合である．

$A \cap B \neq \phi$ のとき，

$$C = \overline{A} \cap B$$

[*1] 空集合の記号は本来 $\emptyset$(`\emptyset`) を用いるべきであるが，多くの書物が ϕ を用いているのでこちらで表す．

とすると，

$$A \cup B = A \cup C, A \cap C = \phi$$

とおける．定理 1 より，C は有限集合か可付番無限集合のどちらかである．もし C が有限集合ならば，ある自然数 m が存在して，

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_m\}$$

と書けるので，

$$A \cup B = C \cup A = \{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_m, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

となる．番号を付け直して，

$$A \cup B = \{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, c_{m+3}, \cdots, c_{m+n}, \cdots\}$$

となるので，可付番集合である．C が有限集合か可付番無限集合ならば，$A \cap B = \phi$ の場合と同様なので $A \cup B$ は可付番集合となる． ［証明おわり］

定義 4 二つの集合 A, B に対してその間に，単射写像（中への 1 対 1 写像）

$$f : A \longrightarrow B$$

が存在するとき，A より B の方が濃度が大きいといい，

$$\mathrm{Card.}(A) \leq \mathrm{Card.}(B)$$

とあらわす．また，A, B 間に，全単射写像（上への 1 対 1 写像）

$$g : A \longrightarrow B$$

が存在するとき，A と B は濃度が等しいといい，

$$\mathrm{Card.}(A) = \mathrm{Card.}(B)$$

とあらわす．

前者の場合，「より大きい」と言うが，濃度の式には「=」がついていることに注意しなければならない．

無限集合の中で可付番集合だけは元の数に「個」を付けることが許されている．可付番集合の濃度（すなわち自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ の濃度のこと）を

可付番無限個

といい，$\boldsymbol{\aleph_0}$（アレフゼロと読む）で表す．また実数の集合 $\boldsymbol{R}$ の濃度は

$$\mathrm{Card.}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\aleph}$$

とかき，「連続濃度」という名前がついている．これら二つの濃度 $\boldsymbol{\aleph_0}$，$\boldsymbol{\aleph}$ は集合の濃度の基準になっている．

定理 3 実数全体の集合 R は可付番集合ではない．つまり

$$\mathrm{Card.}(\boldsymbol{N}) < \mathrm{Card.}(\boldsymbol{R})$$

$$\boldsymbol{\aleph_0} < \boldsymbol{\aleph}$$

［証明］$\boldsymbol{R}$ が可付番集合であると仮定する．次のような $\boldsymbol{R}$ の無限部分集合 X を考える．

$$X = \{x \mid 0 < x < 1, x \in \boldsymbol{R}\}$$

X の元を全て 10 進法の小数で表す．$0.299999 \cdots = 0.3$ というように二通りに表せるような場合は前者を採用するものとする．定理 1 より $\boldsymbol{R}$ が可付番集合ならば X も可付番集合であるから，元には全部番号をつけることができるはずである．つまり開区間 (0，1) のすべての実数 (無限小数) を自然数に対応させながら，一列に並べることができた，とする．つまり

$$r_1 = 0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots$$

$$r_2 = 0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots$$

$$r_3 = 0.x_{31}x_{32}x_{33}\cdots$$

$$\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

という具合である．ここで，x_{jk} は，j 番目の実数の少数第 k 位の数で，0 または 1 桁の自然数 (1〜9) のどれかを表す．このとき，

$$y1 \neq x11$$

$$y2 \neq x22$$

$$y3 \neq x33$$

$$\cdots \neq \cdots\cdot$$

となるように 0 または 1 桁の自然数，$y1, y2, y3, \cdots$ を選び出し，それを順に並べた次のような無限小数 (= 実数),

$$y = 0.y_1y_2y_3\cdots$$

を考える．すると，この y は，実数 r_1 と少数点第 1 位が異なり，実数 r_2 と少数点第 2 位が異なり，実数 r_n と少数点第 n 位が異なり，$\cdots$ ということになる．すなわち，y はすでに並べ尽くされているはずのすべての実数 $r_1, r_2, r_3 \cdots$ と異なることになり，矛盾を生じる． したがって，実数の集合 $\boldsymbol{R}$ は可付番集合ではない．

［証明終わり］

定理 4 無限集合の部分集合の中には必ず可付番集合であるものが存在する．

［証明］A を無限集合とする．$A_1 = A$ より一つの元 a_1 を選ぶ．次に $A_2 = \{a \mid a \in A_1, a \neq a1\}$ より a_2 を選ぶ．次に $A_3 = \{a \mid a \in A_2, a \neq a_2\}$ より a_3 を選ぶ．これを繰り替えし，$A_n = \{a \mid a \in A_{n-1}, a \neq a_{n-1}\}$ より a_n を選ぶ．A は無限集合なのでこの操作を無限に続けることができる．その結果

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

という元が得られるが，

$$A' = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

とすれば，A' は可付番無限集合である． ［証明おわり］

参考文献

[1] 石村園子『すぐわかる代数』（東京図書，2003 年）
[2] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>
[3] 「Wikipedia」<http://en.wikipedia.org/wiki/>
[4] F（エフ）「ときわ台学」<http://www.f-denshi.com/>