同値類
Equivalence Class

定義 1 集合 E に同値関係 $\sim$ が定められているとする．このとき $a \in E$ に対して

$$C_a = \{x \mid x \sim a,\ x \in E\}$$

を a を**代表元** (**representative**) とする**同値類** (**equivalence class**) と呼ぶ．[*1]

定理 1 集合 E に同値関係 $\sim$ が定められているとき，次のことが成り立つ．

1. $a \in C_a$
2. $x, y \in C_a \Longrightarrow x \sim y$
3. $a \sim b \Longrightarrow C_a = C_b$
4. $a \not\sim b \Longrightarrow C_a \cap C_b = \phi$

［証明］

1. $a \sim a$ より自明．
2. $x, y \in C_a \Longrightarrow x \sim a, y \sim a \Longrightarrow x \sim a, a \sim y \Longrightarrow x \sim y$
3. $\forall x \in C_a$ について $x \sim a$．また $a \sim b$ より $x \sim b$．よって $x \in C_b$．つまり $C_a \subset C_b$．同様に $C_b \subset C_a$．$\therefore C_a = C_b$
4. $C_a \cap C_b \neq \phi$ と仮定すると，$\forall x \in C_a \cap C_b$ について，$x \in C_a$ and $x \in C_b$ より $x \sim a, x \sim b$ つまり $a \sim b$ となり矛盾する．［証明おわり］

これらのことより集合 E を重なることなく完全に分類することができる．この分類を同値関係 $\sim$ による**類別** (**classification**) という．まとめると次のようになる．

定理 2 同値関係により集合 E を次の性質を持つ類 $C_{a_1}, C_{a_2}, C_{a_3}, \cdots, C_{a_n}$ に類別できる．

$$E = C_{a_1} \cup C_{a_2} \cup C_{a_3} \cup \cdots \cup C_{a_n}, C_{a_i} \cap C_{a_j} = \phi (i \neq j), C_{a_i} \neq \phi$$

類別による類 C_a の元 a を類 C_a の代表元と呼ぶ．また，各類から一つずつ代表元を取り出した集合

$$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$$

を**完全代表系** (**complete system of representatives**) と呼ぶ．

参考文献

[1] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>
[2] 石村園子『すぐわかる代数』（東京図書，2003 年）

[*1] 同値類の記号はほかにも色々あり，$[a], \overline{a}, C(a)$ などと表す．