体

Field

定義 1 2 種類の演算（習慣的に，和 $(+)$，積 $(\cdot)$ で表される）が定義された集合 F が以下の性質を満たすとき，**体 (field)** と呼ばれる．[*1]

1. 演算 $+$ に関してアーベル群をなす．（一般に単位元は 0 で表される．）
2. 0 を除く集合 $F-\{0\}$ が演算 $\cdot$ に関して群をなす．（一般に単位元は 1 で表される．）
3. 演算 $+, \cdot$ に関して分配律を満たす．

$$\begin{cases} a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \\ (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \end{cases}$$

演算 $\cdot$ に関しては交換律は要求されない．

一言で言えば乗法に関しても 0 を除けば郡をなす環を体という．

体を考えるときも集合と演算を組にして考えるので，$(F,+,\cdot)$ のように表すこともある．

例 1 有理数体 $\mathbb{Q}$，実数体 $\mathbb{Z}$，複素数体 $\mathbb{C}$ は最も基本的な体の例である．

例 2 有理式全体も体をなす．係数の範囲によって $\mathbb{Q}(x), \mathbb{R}(x), \mathbb{C}(x)$ と表す．多項式環では [ ] を用いたが，有理式体では ( ) を用いる．

例 3 素数 p に関する剰余類 $\mathbb{Z}/p$ は自然な演算に関して体をなす．これを剰余類体と呼ぶ．元の個数が有限である体の例である．

例 4 代数体 $\mathbb{Q}(\alpha)$，円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ と呼ばれる体は整数論において重要な役割を演ずる．

例 5 複素数体を拡張した**四元数 (quaternion)** 体 $\mathbb{H}$ というものもある．

参考文献

[1] 長岡亮介『線形代数学』（放送大学教育振興会，2004 年）

[*1] 体という訳語は英語の訳ではなく，Körper［独］あるいは corps［仏］に由来する．