コーシーによる代数学の基本定理の証明

代数学の基本定理は 1799 年に 22 歳のガウスによって証明された. ガウスはその後 4 回別証を与え，最後の証明は 1849 年，72 歳のときに行われた．最初の証明から 50 年がたっていた.

ガウスより少し遅れて現れたコーシーによる証明はとてもシンプルで理解しやすい.

定理 1 代数学の基本定理 n 次の複素係数の多項式は n 個の根をもつ.

［証明］

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (\mathbb{C} \ni x, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \neq 0)$$

とする．x^n でくくって，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right) \\ &= uz \end{aligned}$$

とする．$|x| \to \infty$ のとき

$$z = 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \to 1$$

つまり

$$\lim_{x \to \infty} z = 1$$

x が原点回りを一周すると $u = x^n$ は途切れることなく n 周する．$|x|$ の大きさにかかわらずこのことは成り立つ．z の第 2 項以降を無視できるほど $|x|$ が大きい場合は uz も連続して原点を n 周する．ここから $|x|$ をどんどん小さくしていくと uz つまり $f(x)$ は最終的に a_n に近づく．つまり

$$\lim_{x \to 0} uz = \lim_{x \to 0} f(x) = a_n \neq 0$$

この $|x|$ を小さくしていく過程で n 重の曲線は n 回原点を横切る．横切るときの x の値が $f(x) = 0$ の解である．つまり $f(x) = 0$ は n 個の解をもつ.

[1] ではこれで証明が終わっているが，実は n 個より根が多い場合を論じていない．n 重の輪が後戻りしていないならばこれでいいのであるが，そうしないことは証明の過程で現れない．もし n 個より多い解をもてば

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n)(x - \alpha_{n+1})$$

というように n 次であることと矛盾している. ［証明おわり］

参考文献

[1] 草場公邦『ガロワと方程式』（朝倉書店，すうがくブックス 7，1991 年）