正規部分群

Normal Subgroup

定義 1 $\forall g \in G$ について

$$gH = Hg$$

が成り立つ部分群 H を G の正規部分群と呼ぶ.

これは gH と Hg が集合として等しいことを言っているのであって，$h \in H$ に対して，$gh = hg$ である必要はない．当然ながらアーベル群の部分群は全て正規部分群である.

例 1 対称群 $S_3 = \{\iota, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ を部分群 $H = \{\iota, (1\ 2)\}$ で類別すると，右剰余類は

$$\{H, H(1\ 3), H(2\ 3)\} = \{H, \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}, \{(2\ 3), (1\ 2\ 3)\}\}$$

左剰余類は

$$\{H, (1\ 3)H, (2\ 3)H\} = \{H, \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}, \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\}\}$$

であるため，H は正規部分群ではない．また交代群 $A_3 = \{\iota, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ は正規部分群である.

定理 1 A, B が G の正規部分群ならば，$A \cap B$ も G の正規部分群である.

［証明］$\forall g \in G$ について，

$$gA = Ag, gB = Bg \tag{1}$$

$C = A \cap B$ とすると，$\forall c \in C$ について

$$c \in A \text{ and } c \in B$$

なので

$$gc \in gA \text{ and } gc \in gB$$

(1) より

$$gc \in Ag \text{ and } gc \in Bg$$

$$\therefore gc \in Ag \cap Bg$$

後述補題 1 より

$$gc \in Cg$$

$$\therefore gC \subset Cg$$

同様に

$$gc \in Cg$$

$$\therefore Cg \subset gC$$

であることも証明できるので

$$gC = Cg$$

［証明おわり］

補題 1

$$C = A \cap B \Longrightarrow Cg = Ag \cap Bg$$

［証明］$\forall c \in C$ について

$$c \in A \Longleftrightarrow c = a \ (\exists a \in A) \Longrightarrow cg = ag \in Ag$$

$$c \in B \Longleftrightarrow c = b \ (\exists b \in B) \Longrightarrow cg = bg \in Bg$$

$$\therefore cg \in Ag \cap Bg$$

cg は Cg の全ての元を表しうるから

$$Cg = Ag \cap Bg$$

［証明終わり］

定理 2 H が G の正規部分群であるための必要十分条件は

$$\forall g \in G, \forall h \in H \text{ に対して } g^{-1}hg \in H$$

であることである．

［証明］必要条件であることの証明．$\forall h \in H$ について

$$gh \in gH = Hg$$

右から g^{-1} をかけて

$$ghg^{-1} \in H$$

十分条件であることの証明．$ghg^{-1} = h'$ とおくと

$$h' \in H$$

$$h'g \in Hg$$

$$\therefore gh \in Hg$$

$$\therefore gH \subset Hg$$

また g は任意の元なので g を g^{-1} にしても成り立つ．つまり

$$g^{-1}hg \in H$$

$g^{-1}hg = h''$ とおくと

$$h'' \in H$$

$$gh'' \in gH$$

$$\therefore hg \in gH$$

$$\therefore Hg \subset gH$$

$$\therefore Hg = gH$$

よって H は G の正規部分群である． ［証明おわり］

問題 1 H, K を群 G の部分群とし，$HK = \{x \mid x = hk, h \in H, k \in K\}$ と定義するとき，次のことがらを証明せよ．

1. K が G の正規部分群ならば，HK は G の部分群である．
2. H, K が G の正規部分群ならば，HK は G の正規部分群である．

［解］

1. $\forall h_1, h_2 \in H, \forall k_1, k_2 \in K$ とすると，

$$h_1k_1(h_2, k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$$

$$k_1k_2^{-1} \in K$$

であるから，

$$h_1k_1k_2^{-1}h_1^{-1} \in h_1Kh_2^{-1} \tag{2}$$

今 K の任意の元を k とすると，K は正規部分群だから

$$h_2kh_2^{-1} \in K$$

$$\therefore kh_2^{-1} \in h_2^{-1}K$$

$$\therefore h_1kh_2^{-1} \in h_1h_2^{-1}K \tag{3}$$

H は G の部分群だから，

$$h_1h_2^{-1} \in H$$

つまり $h_1h^{-2}K$ の任意の元は

$$h_1h_2^{-1}k' \in KH$$

つまり

$$h_1h_2^{-1}K \subset HK \tag{4}$$

(2),(3),(4) より

$$h_1k_1(h_2, k_2)^{-1} \in HK$$

よって HK は G の部分群である．

2. $\forall h \in H, \forall k \in K, \forall g \in G$ とすると，

$$g^{-1}kg \in k$$

$$kg \in gK$$

$$hkg \in hgK$$

$$g^{-1}hkg \in g^{-1}hgK$$

右辺の任意の元 $g^{-1}hgk'$ は

$$g^{-1}hgk' \in Hk' \in HK$$

$$\therefore g^{-1}hgK \subset HK$$

$$\therefore g^{-1}hkg \in HK$$

よって HK は G の正規部分群である．

定理 3 演算 $\cdot$ を

$$Ap \cdot Aq = Apq$$

により定義すると，群 G の正規部分群 H による右剰余類（正規部分群なので左剰余類でも同じ）

$$\{H, Ha, Hb, \cdots\} \tag{5}$$

は演算 $\cdot$ について群をなす．

［証明］$x, y \in G$ ならば $xy \in G$ なので $Hx \cdot Hy = Hxy \in \{H, Ha, Hb, \cdots\}$．つまり G は演算 $\cdot$ について閉じている．

$(Ha \cdot Hb) \cdot Hc = Hab \cdot Hc = H(ab)c = Ha(bc) = Ha \cdot Hbc = Ha \cdot (Hb \cdot Hc)$．よって結合法則が成り立つ．

H は単位元である．

Ha の逆元は Ha^{-1} である．よって群である条件を全て満たす． ［証明おわり］

(5) を G の H による**剰余群 (residue class group)** または **(商群，quotient group,factor group)** といい，G/H と表す．

参考文献

[1] 石村園子『すぐわかる代数』（東京図書，2003 年）

[2] 長岡亮介『線形代数学』（放送大学教育振興会，2004 年）

[3] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>

[4] 「Wikipedia」<http://en.wikipedia.org/wiki/>