

# 環

## Ring

定義 1 2 種類の演算 ( 習慣的に, 和 (+), 積 (·) で表される ) が定義された集合  $R$  が以下の性質を満たすとき, 環 (ring) と呼ばれる .

1. 演算  $+$  に関してアーベル群をなす . ( 一般に単位元は  $0$  で表される . )
2. 演算  $\cdot$  に関して半群 (semigroup) をなす . ( 半群とは群の要件から逆元の存在を除いたものである . )
3. 演算  $+, \cdot$  に関して分配律を満たす .

$$\begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{cases}$$

演算  $\cdot$  に関しては交換律は要求されない .

例 1 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  は加法と乗法に関して環をなす . これは最も基本的な環の例であり, 整数環と呼ばれる .

例 2 多項式全体の集合も多項式の和と積に関して環をなす . これを多項式環と呼び,

$$\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$$

と表す . それぞれ係数の範囲に従った記号法である .

例 3 剰余類  $\mathbb{Z}/m$  は剰余類の自然な演算に関して環をなす . これを剰余類環と呼ぶ .

その他行列に関しても環がある .

## 参考文献

- [1] 長岡亮介 『線形代数学』 ( 放送大学教育振興会, 2004 年 )
- [2] 「ウィキペディア」 <<http://ja.wikipedia.org/wiki/>>