

部分群

Sub Group

定義 1 演算 \cdot について、群 G の空でない部分集合 H が演算 \cdot について群をなしているとき、 H を G の部分群 (sub group) という。

例 1 加法 $+$ について実数 R は群をなす。整数 Z は R の部分群である。

例 2 乗法について $H = \{1, -1\}$ は $G = \{1, -1, i, -i\}$ の部分群である。

定理 1 演算 \cdot について集合 $H (H \subset G, H \neq \phi)$ が群 G の部分群であることは次の 1.2. がともに成り立つことが必要十分である。

$$1. \forall a, b \in H \implies a \cdot b \in H$$

$$2. \forall a \in H \implies a^{-1} \in H$$

[証明] H が G の部分群ならば、その定義より 1.2. はともに成り立つ。逆に 1.2. の双方が成り立つとき、単位元 e が H に含まれることを言えば部分群である条件を全て満たす。

$$a \cdot a^{-1} \in H$$

$$\therefore e \in H$$

よって H は G の部分群である。

[証明終わり]

つまり群 G の空でない部分集合 H が部分群であるかどうかを知りたいければ、演算について閉じていて、逆元がその中に含まれるかどうか調べればよいことになる。群の条件は閉じていることを含めて 4 つあるが、そのうち 2 つだけを調べればよいことになるので便利である。

定理 2 演算 \cdot について集合 $H (H \subset G, H \neq \phi)$ が群 G の部分群であることは、次のことがなりたつことが必要十分である。

$$\forall a, b \in H \implies a \cdot b^{-1} \in H \tag{1}$$

[証明] 前定理の 1.2. がともに成り立つことと (1) が必要十分であることを証明すればよい。まず必要性の証明から。前定理の 2. より

$$\forall a, b \in H \implies a, b^{-1} \in H$$

前定理の b を b^{-1} に置き換えて、

$$\forall a, b^{-1} \in H \implies a \cdot b^{-1} \in H$$

よって必要性が証明された。コンマと点が混在していて見にくいので注意すること。次に十分性についての証明。(1) の b を a に置き換えて

$$\forall a \in H \implies a \cdot a^{-1} \in H \implies e \in H$$

つまり単位元は H に含まれていることがわかった。これだけで十分なのだがもう少し続ける。(1) の a を e に、 b を a に置き換えると、

$$e, a \in H \implies e \cdot a^{-1} = a^{-1} \in H$$

つまり前定理 2. が導けた . 同様に $b^{-1} \in H$ でもあるので , (1) の b を b^{-1} に置き換えてやると ,

$$\forall a, b^{-1} \in H \implies a \cdot (b^{-1})^{-1} = a \cdot b \in H$$

前定理 1. も導けた .

[証明おわり]

この定理により , 前定理よりさらに進んで , 条件を 1 つだけ調べれば , それが部分群かどうか判るといことになるのでとても便利である .

例 3 整数全体の集合 Z は加法に関して群をなす . Z の空でない部分集合 S が部分群をなすための条件は

$$\forall x, y \in S \text{ について } x - y \in S$$

となることである .

この条件を満たす集合 S がもし 0 以外の要素を含むならば , S は必ず正の要素を含み , かつそのような正の要素の中で最小のものを d とすると ,

$$S = \{nd \mid n \in Z\}$$

であることが証明できる . また自明な部分群 $\{0\}$ は $d = 0$ という特別な場合とみなすことができる . こうして加法群 Z の部分群は , ある整数の倍数全体の集合だけであることが言える .

例 4 乗法群 $R^* = R - \{0\}$ の部分群についても同様である . R^* の空でない部分集合 S が部分群をなすための条件は

$$\forall x, y \in S \text{ について } \frac{x}{y} \in S$$

となることである .

この条件を満たす集合 S がもし 1 以外の正の要素を含むならば , S は必ず 1 より大きい要素を含む . そのような正の要素の中で最小のものが存在するとき (存在するとは限らない) , その最小のものを r とすると ,

$$S = \{d^n \mid n \in Z\}$$

であることが証明できる . また自明な部分群 $\{1\}$ は $r = 1$ という特別な場合とみなすことができる .

問題 1 H, K が群 G の部分群ならば $H \cap K$ も部分群であることを証明せよ .

[証明] 定理 2. より ,

$$\forall a, b \in H \implies a \cdot b^{-1} \in H$$

$$\forall a, b \in K \implies a \cdot b^{-1} \in K$$

$$\therefore a, b \in H \text{ and } a, b \in K \implies a \cdot b^{-1} \in H \text{ and } a \cdot b^{-1} \in K$$

$$\therefore a, b \in H \cap K \implies a \cdot b^{-1} \in H \cap K$$

よって $H \cap K$ は部分群である .

[証明おわり]

$H \cap K$ は部分群であるが $H \cup K$ は部分群であるとは限らない . たとえば $H = \{2a \mid a \in Z\}, K = \{3a \mid a \in Z\}$ はともに加法群 Z の部分群であり , $H \cap K = \{6a \mid a \in Z\}$ も部分群であるが ,

$$H \cup K = \{\dots, -2, 0, 2, 3, 4, 6, \dots\}$$

は部分群ではない . たとえば $2 + 3$ などが元でない .

以降演算記号を省略する .

問題 2 H を G の部分群とする . $a \in G$ であるとき

$$aHa^{-1} = \{aha^{-1} | h \in H\}^{*1}$$

も G の部分群となることを証明せよ .

[証明] 一般に

$$(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$$

が成り立つ . なぜならば

$$abc(abc)^{-1} = e$$

の両辺に左から順に c^{-1}, b^{-1}, a^{-1} をかけてゆけばよいからである .

aHa^{-1} の任意の二つの元を

$$ah_1a^{-1}, ah_2a^{-1}$$

とすると ,

$$ah_1a^{-1}(ah_2a^{-1})^{-1} = ah_1a^{-1}ah_2a^{-1} = ah_1h_2a^{-1}$$

$h_1h_2 \in H$ なので $ah_1h_2a^{-1} \in aHa^{-1}$. よって aHa^{-1} は G の部分群である .

[証明おわり]

アーベル群では共役部分群は自分自身となるので , 非可換群で例示してみよう . この時点で対称群を習得していない場合は読み飛ばしても一向に差し支えない .

例 5 4 次の対称群 S_4 に対し , $(1\ 2\ 3)$ を生成元とする巡回部分群 $H = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ を考える . この部分群 H に対し , S_4 の元 $(1\ 4)$ によって生成される共役部分群を求めてみよう .

$$(1\ 4)e(1\ 4)^{-1} = (1\ 4)e(1\ 4) = e$$

$$(1\ 4)(1\ 2\ 3)(1\ 4)^{-1} = (1\ 4)(1\ 2\ 3)(1\ 4) = (2\ 3\ 4)$$

$$(1\ 4)(1\ 3\ 2)(1\ 4)^{-1} = (1\ 4)(1\ 2\ 3)(1\ 4) = (2\ 4\ 3)$$

よって , H の $(1\ 4)$ による共役部分群は $\{e, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$ だと分かる . つまり

$$(1\ 4)H(1\ 4)^{-1} = \{e, (4\ 2\ 3), (2\ 4\ 3)\}$$

問題 3 群 G において $C = \{c \mid c \in G, \forall x \in G \text{ に対して } cx = xc\}$ とするとき , C は G の部分群であることを示せ .

[証明] $c \in C$ であれば , $\forall x \in G$ について $cx = xc$ が成り立ち , $x^{-1} \in G$ であるので $cx^{-1} = x^{-1}c$ も成り立つ . もう一つの元 $d \in C$ を考え $cx = xc$ の両辺に左から d^{-1} をかけると

$$d^{-1}cx = d^{-1}xc$$

$d \in C$ であるから $dx^{-1} = x^{-1}d$, さらに $d^{-1}x = xd^{-1}$ であるから

$$d^{-1}cx = xd^{-1}c$$

つまり

$$(d^{-1}c)x = x(d^{-1}c)$$

*1 aHa^{-1} はこれ全体で集合を表す記号として用いている . このような集合を H の共役部分群という .

であるので

$$d^{-1}c \in C$$

ということがわかり， C は G の部分群となる．

[証明おわり]

G のなかで交換法則が成り立つ元だけを全部集めてきたら，それが部分群になるという意味で，このような部分群を G の中心 (center) と呼ぶ． G がアーベル群であれば中心は自分自身となるので興味のない問題である．非可換群で例示してみよう．

例 6 逆行列をもつ 2 次正方行列は乘法について非可換の群である．その中心は

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

つまりスカラー行列の集合である．

中心については色々面白い話題があるが，ここではこれ以上掘り下げないことにする．

問題 4 $Q^* = Q - \{0\}$ は乘法について群である． $H = \{x \mid x = 3^m 5^n \ (m, n \in \mathbb{Z})\}$ は Q^* の部分群であることを示せ．

[証明] $x = 2^m 3^n, y = 2^k 3^l$ とすると $xy^{-1} = 2^{m-k} 3^{n-l}$ ． $m-k, n-l \in \mathbb{Z}$ であるから， $xy^{-1} \in H$ ．よって H は部分群．

[証明おわり]

問題 5 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ は加法

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$$

について群をなしている． $H = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = 2x\}$ は \mathbb{R}^2 の部分群であることを示せ．

[証明]

$$(x, 2x) + (-z, -2z) = (x - z, 2(x - z)) \in H$$

よって H は部分群．

[証明おわり]

参考文献

- [1] 石村園子 『すぐわかる代数』(東京図書, 2003 年)
- [2] 長岡亮介 『線形代数学』(放送大学教育振興会, 2004 年)
- [3] 「物理のかぎしっぽ」 <<http://hooktail.sub.jp/>>