対称群
Symmetric Group

定義 1 自然数 $1, 2, 3, \cdots$ の置き換え

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

を n 次の**置換**と呼ぶ.

置換を表す 1 行目が置換前の並びを表し，2 行目が置換後を表す．ここでは数字を用いて定義したが，置換するものは何でもかまわない．n 個の置換の種類は当然 $n!$ だけある．置換を表す場合通常 σ（シグマ），τ （タウ）などのギリシア文字の小文字を用いる．この定義の置換を σ とすると，

$$\sigma(1) = i_1, \sigma(1) = i_1, \sigma(1) = i_1, \cdots, \sigma(n) = i_n$$

ということである.

例 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

のとき

$$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2$$

定義 2 （置換の積） σ, τ が $X_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 上の置換であるとき，

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) \quad , \forall i = X_n$$

という関係で，置換 σ, τ の積 $\sigma\tau$ を定義する．つまり i が集合 X_n の要素であるとき，変換 τ を行いその後 σ を行うとき，その合成を $\sigma\tau$ と表す．$\sigma \cdot \tau$ と表すこともあるが，$\cdot$ を省略する場合も多い.

つまり置換の積とは，置換を X_n から X_n への上への写像と見たときの合成写像 $\sigma \circ \tau$ にほかならない．置換の積を $\tau\sigma = \sigma \circ \tau$ と 逆に定義する流儀も存在する ので注意を要する．恒等写像に相当する置換を**恒等置換**と呼び，ι（イオタ）で表す．逆写像に相当する置換を**逆置換**と呼び σ^{-1} で表す.

例 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

であるとき

$$(\tau\sigma)(2) = 3, (\sigma\tau)(2) = 1$$

である．また

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である．また

$$\sigma^{-1}(1) = 3, \tau^{-1}(1) = 1$$

である．また

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

である．

X_n 上の置換は積について閉じている．また結合則も成り立つ．恒等置換 ι について

$$\iota\sigma = \sigma\iota = \sigma$$

が成り立つ．つまり単位元をもつ．また逆元に相当する逆置換をもつ．以上のことからこの置換の全体は**群 (group) をなす**．この群を n **次対称群**[*1]と呼び，S_n と書く．S_n の要素の個数は n ではなく，$n!$ であることに注意しなければならない．

参考文献

[1] 石村園子『すぐわかる代数』（東京図書，2003 年）

[*1] "対称式を不変にする変換" という意味で名付けられた．