第一種完全楕円積分と算術幾何平均について

単位半円 $y=\sqrt{1-x^2}$ の弧長の $\dfrac{1}{2}$ の長さを求める計算は,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる．このことから,

$$\boxed{2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi}$$

と定義することができる．また① を完全円積分と呼ぶことにする．

$$F(z)=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

は不完全円積分であるが，この逆関数を用いて,

$$\boxed{\sin\omega = F^{-1}(\omega), \cos\omega = F^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}$$

と定義することができる．このことから,

$$\boxed{\sin^{-1} z = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

が得られる．

$P(x)$ が 2 次の多項式のとき,

$$F(z)=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

は対数関数または円関数（三角関数）になるが，$P(x)$ が 3 又は 4 次のときは初等関数であらわすことができない．このとき関数 $F(z)$ を楕円積分，逆関数 $F^{-1}(z)$ を楕円関数と呼ぶ．$P(x)$ が 4 次の場合でも $x=\dfrac{1}{t}$ とおくことにより，3 次の場合に帰着できる．また $P(x)$ が 5 次以上の場合は楕円積分，楕円関数を超えているので，超楕円積分，超楕円関数と呼ぶ．

$$F(z)=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

はレムニスケート積分と呼ばれる典型的な楕円積分である．楕円積分は次のように分類できる．

第 1 種楕円積分

$$\boxed{F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}$$

第 2 種楕円積分

$$\boxed{E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi}$$

第 1 種完全楕円積分

$$\boxed{K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}}$$

第 2 種完全楕円積分

$$\boxed{E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}$$

これらの積分は初等関数では表せないが，例えば第 1 種完全楕円積分は，

$$\boxed{K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2k} \right)^2 + \left(\frac{3}{8k^2} \right)^2 + \left(\frac{5}{16k^3} \right)^2 + \cdots \right\}}$$

と，ベキ級数展開できる．

さて，ここで少し横道にそれて，このベキ級数展開がどうしてできたか調べてみよう．

まず，$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ をマクローリン展開すると，

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots$$

$x = k^2 \sin^2 \varphi$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\
=&1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8}(k^2 \sin^2 \varphi)^2 + \frac{5}{16}(k^2 \sin^2 \varphi)^3 + \frac{35}{128}(k^2 \sin^2 \varphi)^4 + \cdots \\
=&1 + \frac{1}{2}k^2 \left(\frac{1}{2} + \cos 2\varphi \right) + \frac{3}{8} \left\{ k^2 \left(\frac{1}{2} + \cos 2\varphi \right) \right\}^2 + \frac{5}{16} \left\{ k^2 \left(\frac{1}{2} + \cos 2\varphi \right) \right\}^3 + \frac{35}{128} \left\{ k^2 \left(\frac{1}{2} + \cos 2\varphi \right) \right\}^4 + \cdots
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{o}{2}} \cos 2\varphi d\varphi = 0$ であることを考慮すると，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{2}k^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left\{ k^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right\}^2 + \frac{5}{16} \left\{ k^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right\}^3 + \frac{35}{128} \left\{ k^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right\}^4 + \cdots \right]$$

大かっこの数列を $a_0, a_1, a_3 \cdots$ とすると，

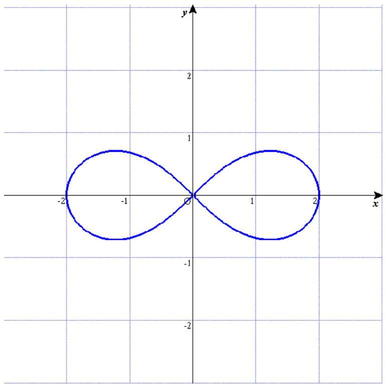
$$a_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2}k^2 a_{n-1} = \frac{(2n-1)k^2}{4n} a_{n-1}$$

レムニスケート $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ の弧長

$$s = a^2 \int_0^{\varphi} \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}$$

原点から最も遠くなるところまでの弧長は，$r = a\cos\varphi$ とおいて，

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{dr}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right)$$



第 1 種完全楕円積分と算術幾何平均について

$0 < b < a$ として，定積分，

$$K(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}$$

を考える．この式は変形して，

$$\begin{aligned}K(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)+b^2\sin^2 t}}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}}\end{aligned}$$

$k = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ とおくと，$0 < k < 1$ で，

$$\begin{aligned}K(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{a^2-a^2k^2\sin^2 t}}\\ &= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

この積分は第 1 種完全楕円積分と呼ばれるもので，k は楕円，

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

の離心率である．さて，この積分については次のことが成り立つ．

定理

$$\boxed{\alpha = \frac{a+b}{2}, \beta = \sqrt{ab} \text{ とすると，} K(a,b) = K(\alpha,\beta)}$$

証明

変数変換，

$$\tan x = \frac{\sin 2t}{k+\cos 2t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

を考える．ただし，$0 < x < \pi, 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とする．この変換では，$k + \cos 2t = 0$ となる t において不連続になるが，$x = \dfrac{\pi}{2}$ を与えてやれば，t に対して x は単調に増加する関数となり，とくに問題は無いと思われる．

もし問題となればそこで積分を切ってやればよい．なお t が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化するとき，い．x は 0 から π まで変化する．またこの変数変換を **Landen 変換**と呼ぶ．

さて，ここで定積分，

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

を考える．定積分②と積分範囲が違うので注意を要する．この積分に **Landen 変換**をほどこすことにする．

③より，

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \\
&= \frac{\sin^2 2t}{(k+\cos 2t)^2}\frac{1}{1+\frac{\sin^2 2t}{(k+\cos 2t)^2}} \\
&= \frac{\sin^2 2t}{(k+\cos 2t)^2+\sin^2 2t} \\
&= \frac{\sin^2 2t}{k^2+2k\cos 2t+1}
\end{aligned}$$

さらに，

$$\begin{aligned}
1-k^2\sin^2 x &= \frac{k^2+2k\cos 2t+1-k^2\sin^2 2t}{k^2+2k\cos 2t+1} \\
&= \frac{k^2\cos^2 2t+2k\cos 2t+1}{k^2+2k\cos 2t+1} \\
&= \frac{(k\cos 2t+1)^2}{k^2+2k\cos 2t+1} \\
\therefore \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} &= \frac{\sqrt{k^2+2k\cos 2t+1}}{k\cos 2t+1}
\end{aligned}$$

また，③の両辺を微分すると，

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{\cos^2 x} &= \frac{2\cos 2t(k+\cos 2t)-\sin 2t(-2\sin 2t)}{(k+\cos 2t)^2}dt \\
&= \frac{2(k\cos 2t+1)}{(k+\cos 2t)^2}dt \\
dx &= \cos^2 x\frac{2(k\cos 2t+1)}{(k+\cos 2t)^2}dt \\
&= \frac{1}{1+\tan^2 x}\cdot\frac{2(k\cos 2t+1)}{(k+\cos 2t)^2}dt \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{\sin^2 2t}{(k+\cos 2t)^2}}\frac{2(k\cos 2t+1)}{(k+\cos 2t)^2}dt \\
&= \frac{2(k\cos 2t+1)}{(k+\cos 2t)^2+\sin^2 2t}dt \\
&= \frac{2(k\cos 2t+1)}{k^2+2k\cos 2t+1}dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\therefore \frac{1}{a}\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{k^2+2k\cos 2t+1}}{k\cos 2t+1}\cdot\frac{2(k\cos 2t+1)}{k^2+2k\cos 2t+1}dt \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sqrt{k^2+2k\cos 2t+1}}dt \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sqrt{k^2+2k(1-2\sin^2 t)+1}}dt \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sqrt{k^2+2k+1-4k\sin^2 t}}dt \\
&= \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{(k+1)^2-4k\sin^2 t}} \\
&= \frac{2}{a(k+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\dfrac{4k}{(k+1)^2}\sin^2 t}}
\end{aligned}
$$

ここで $a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}, b=\sqrt{\alpha\beta}, \kappa=\dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}, (0<\beta<\alpha)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
a(k+1) &= a\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}+1\right)=\sqrt{a^2-b^2}+a=\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}-\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{2}=\alpha \\
\frac{4k}{(k+1)^2} &= 4\cdot\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{a^2}{\left(\sqrt{a^2-b^2}+a\right)^2}=4\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\tfrac{1}{\alpha^2}=\tfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=\kappa^2
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 t+\beta^2\sin^2 t}}
$$

ところで左辺は,

$$
\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x}}
$$

であるが, $u=\pi-x$ とおくことにより,

$$
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x}}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{du}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 u+\beta^2\sin^2 u}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x}}
$$

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x}}
$$

これで証明ができたのであるが, $a, b\cdot\alpha, \beta$ がさかさまになってしまった.