ラグランジュの未定乗数法

条件付きの極値問題ではラグランジュの未定乗数法は有効な手段である．いくつかの問題を解いて，その図形的意味を確かめる．3-D グラフの作成には wxMaxima を経由して gnuplot を用い，平面のグラフは WinTpic および Grapes を用いた.

■回転放物面をデカルトの正葉線で切り取る場合

問 1　$x^3 - 6xy + y^3 = 0$ のとき $x^2 + y^2$ の極値を求めよ.
解

$$\begin{cases} f = x^2 + y^2 \\ g = x^3 - 6xy + y^3 \end{cases}$$

とする．$f \geqq 0$ であるから，$g = 0$ を満たす $(0, 0)$ は f の極小値（最小値）を与えることは明らか．この点は g の停留点であるから，未定乗数法は使えない.

$$F = f - \lambda g$$

とおくと，

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \lambda(3x^2 - 6y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda(3y^2 - 6x)$$

連立方程式

$$\begin{cases} g = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 & (3) \end{cases}$$

を解くと，(2),(3) より λ を消去して，

$$x(y^2 - 2x) = y(x^2 - 2y)$$

を得る．整理して，因数分解すると，

$$((y + 2)x + 2y)(x - y) = 0$$

となる．前半の括弧が 0 になる場合は，やや長くなるので省略するが，結局 $(0, 0)$ で前出の最小値の場合となる．$x = y$ を (1) に代入すると，$(0, 0)$ 以外に $(3, 3)$ を得る．これが，f の極値を与え，その値は 18 である.

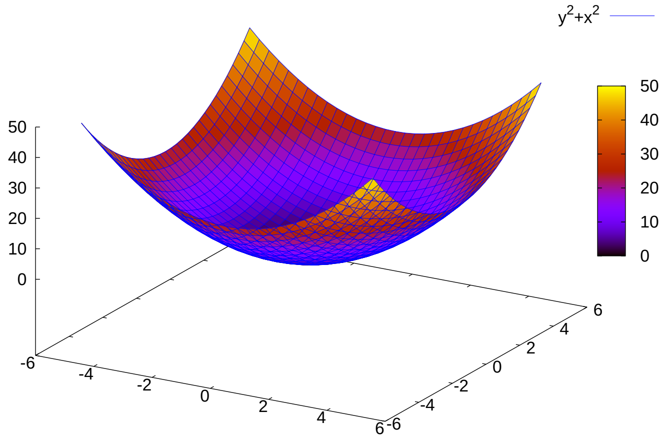

図 1　回転放物面 (Paraboloid of revolution)

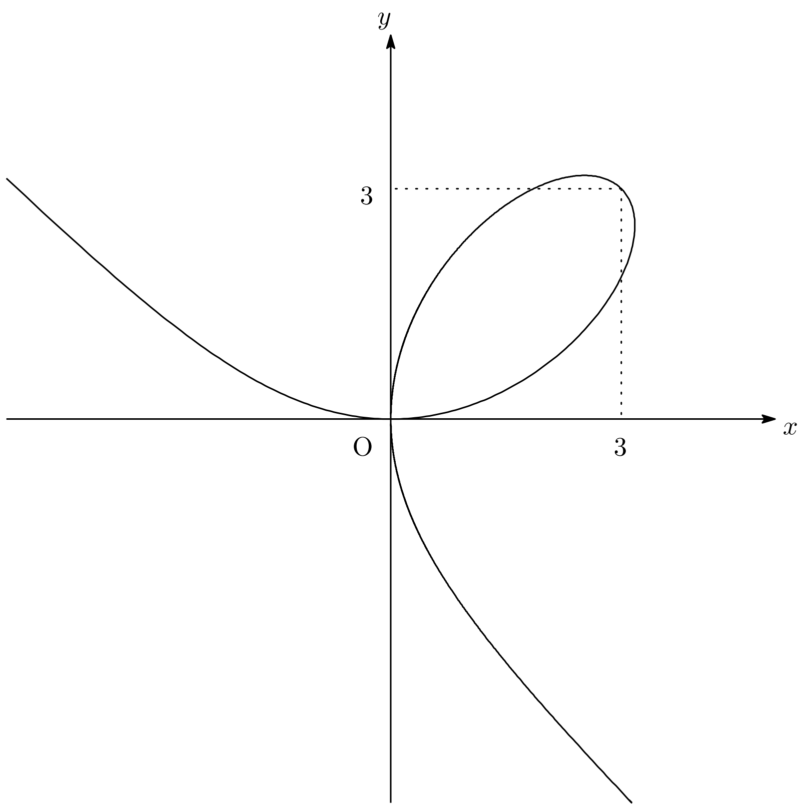

図 2　デカルトの正葉線 (folium of Descartes)

■回転放物面を楕円柱で切り取る場合

問 2　$3x^2+4xy+5y^2=1$ のとき，$f=x^2+y^2$ の極値を求めよ．

解　有界閉集合 $3x^2+4xy+5y^2=1$ (xy 平面では楕円) 上では連続関数 x^2+y^2 は最大値，最小値をもつ．

$$\begin{aligned} f &= x^2+y^2 \\ g &= 3x^2+4xy+5y^2-1 \end{aligned}$$

とする．

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 6x+4y \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 10y+4x \end{aligned}$$

であるから，$z=g$ は停留点をもたない．

$$\begin{aligned} F &= f-\lambda g \\ &= x^2+y^2-\lambda(3x^2+4xy+5y^2-1) \end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x-\lambda(6x+4y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y-\lambda(10y+4x) \end{aligned}$$

連立方程式

$$\begin{cases} g=0 & (4) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}=0 & (5) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0 & (6) \end{cases}$$

を解くと，

(4) $\times x$ + (5) $\times y$ より

$$x^2+y^2=\lambda(3x^2+4xy+5y^2)=\lambda$$

となる．よって，λ は f の最大値，最小値を与える．(4)，(5) より，

$$\begin{aligned} x(1-3\lambda)-2y\lambda &= 0 \\ -2x\lambda+y(1-5\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

これが $x=y=0$ 以外の解をもつためには

$$(1-3\lambda)(1-5\lambda)-4\lambda^2=0$$

でなければならない．つまり

$$11\lambda^2-8\lambda+1=0$$

の解である．これを解いて

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{5}}{11} \qquad \text{（最大値と最小値）}$$

これは行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

の逆行列の固有値でもある．

f は回転放物面で原点から遠くなればなるほど値が大きくなる．g は楕円柱なのでその長軸にと交わるところが最大値を与え，短軸に相当するところが最小値を与える．計算としてはこの楕円を回転させて，つまり

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めて，長軸短軸の長さの 2 乗を求めてもやはり同じように解くことがでる．この場合は微分は使わないので簡単かもしれない．

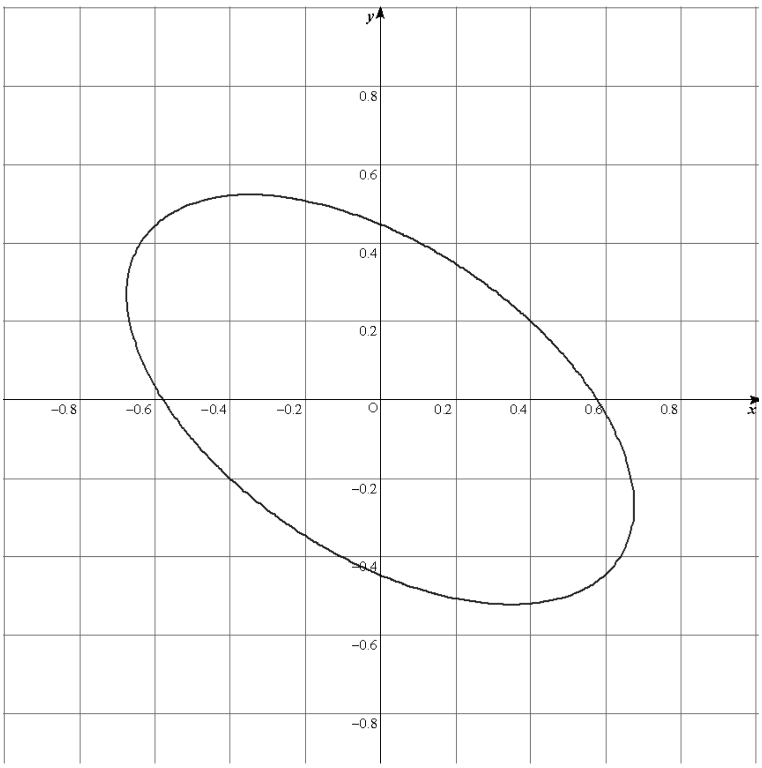

図 3

■回転放物面を双曲線柱で切り取る場合

問 3　$x^2 + 2xy - y^2 = 1$ のとき，$f = x^2 + y^2$ の極値を求めよ．

解

$$\begin{aligned} f &= x^2 + y^2 \\ g &= x^2 + 2xy - y^2 - 1 \end{aligned}$$

とする．

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x + 2y \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2x - 2y \end{aligned}$$

であるから，$z = g$ は停留点をもたない．

$$\begin{aligned} F &= f - \lambda g \\ &= x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 2xy - y^2 - 1) \end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x - \lambda(2x + 2y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y - \lambda(2x - 2y) \end{aligned}$$

連立方程式

$$\begin{cases} g = 0 & (7) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 & (8) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 & (9) \end{cases}$$

を解くと，

(4) $\times\, x$ + (5) $\times\, y$ より

$$x^2 + y^2 = \lambda(x^2 + 2xy - y^2) = \lambda$$

となる．よって，λ は f の極値を与える．(4)，(5) より，

$$\begin{aligned} x(2 - 2\lambda) - 2y\lambda &= 0 \\ -2x\lambda + y(2 + 2\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

これが $x = y = 0$ 以外の解をもつためには

$$(2 - 2\lambda)(2 + 2\lambda) - 4\lambda^2 = 0$$

でなければならない．つまり

$$2\lambda^2 - 1 = 0$$

の解である．これを解いて

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ただし，負の場合は図形的には意味をもたず，x, y は虚数解となる．

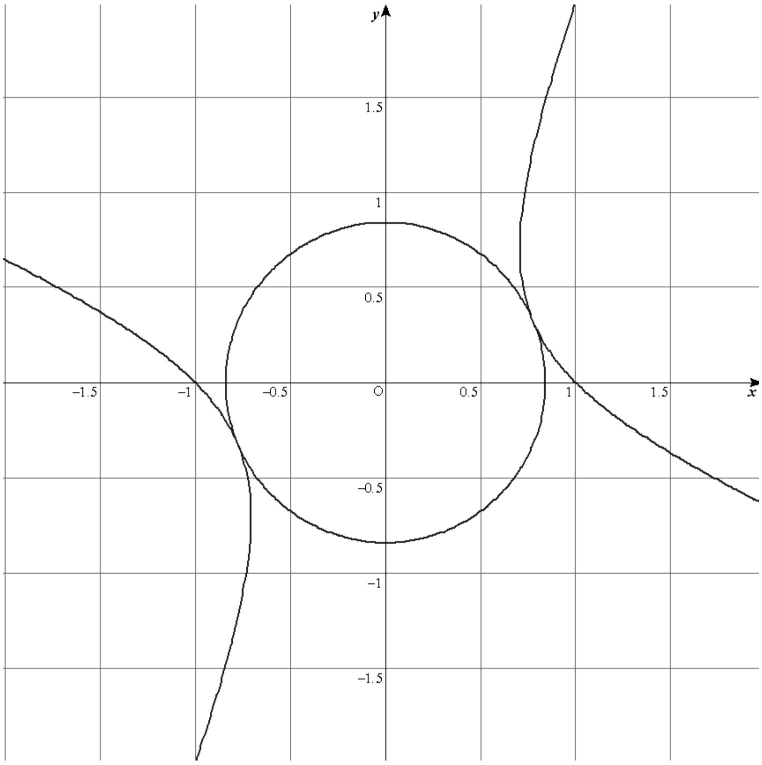

図 4

参考文献

[1] 熊原啓作『多変数の微積分』（放送大学，2003 年）