

メルセンヌ数

「出生時の体重はいくらかね」

玄関での数字問答も相変わらずだったが、生まれた時の体重というのは、新手の質問だった。

「3217 グラムです」

自分のは忘れてしまったので、ルートののを答えた。

「2 の 3217 乗マイナス 1 は、メルセネ素数となる」

ぶつぶつぶやきながら、博士は書斎へ入っていった。

(小川洋子「博士の愛した数式」(新潮社)より引用)

定義 1 $2^n - 1$ の形の自然数をメルセンヌ数 (Mersenne number) と呼び、 M_n で表す。

メルセンヌ数は 2 進数で表記すると n 桁の $1111\dots 1$ である。素数であるメルセンヌ数をメルセンヌ素数と呼ぶ。メルセンヌ数という語で、 n が素数であるもののみを指したり、メルセンヌ素数のみを指す場合もある。

定理 1 M_n がメルセンヌ素数であるとき、 n は素数である。

[証明] 対偶「 n が合成数ならば M_n は合成数である。」を証明する。 a, b を 2 以上の自然数とすると、

$$\begin{aligned} 2^{ab} - 1 &= (2^a)^b - 1 \\ &= (2^a - 1) \{1 + 2^a + (2^a)^2 + \dots + (2^a)^{b-1}\} \end{aligned}$$

となり合成数となる。

[証明おわり]

1644 年にメルセンヌは M_n が素数になるのは、 $n \leq 257$ では、 $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ だけであると発表した。しかしその主張の一部は誤っていた。リストに含まれていない M_{61}, M_{89}, M_{107} が素数であり、リストに含まれている M_{67}, M_{257} は合成数である。 M_{67} の誤りは 1903 年ニューヨークで開かれたアメリカ数学会で、F.D. コールが $193707721 \times 761838257287$ を黒板に計算し、 M_{67} と一致することを証明した。この間一言もしゃべらず、席に戻った後、少し間を置いて感動の拍手が沸き起こったと伝えられている。1957 年にリーゼルの発見者でもあるスウェーデンの数学者ハンス・リーゼルがコンピュータを使用して 18 番目のメルセンヌ素数を発見して以降、コンピュータが使用されている。2008 年 9 月現在メルセンヌ素数は 46 個まで知られている。ただし、メルセンヌ素数としての番号が確定しているものは 39 番目までであり、 $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377, 6972593, 13466917$ としたときの M_p がそうである。さらに 40 番目の候補として $p = 20996011$ が挙がっており、現在間に素数がないかどうか検証中である。分散コンピューティングによるプロジェクト GIMPS はメルセンヌ素数を発見することを目的としており、近年発見されたものは全てこのプロジェクトによるものである。

マラン・メルセンヌ (Marin Mersenne, 1588 年 9 月 8 日 - 1648 年 9 月 1 日)



フランスの僧侶。数学や物理の研究をした。パリに住んでからは、修道院にパスカル父子やデザルグ、ロベルヴァルなどを招き、学問を論じ合う場を提供した。このサークルが、後にパリ科学アカデミー（1666 年創立）となるものの前身であった。その他、フェルマー、デカルト、ガリレオ、ホイヘンス、トリチェリなどとも交流があり、科学的な雑誌がなかった時代、当時のヨーロッパ中の学者たちとの交流をはかり、学問の発達に大いに貢献した。

参考文献

- [1] 小川洋子『博士の愛した数式』（新潮文庫，2005 年）
- [2] 高木貞治『初等整数論講義第 2 版』（共立出版社，1997 年）
- [3] 「ウィキペディア」<<http://ja.wikipedia.org/wiki/>>