漸化式に関する問題

問題 1 非負整数からなる数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_{n+2} = |2a_{n+1} - a_n| \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たしているとする.
　$a_1 = 2^k (k \in \mathbb{N})$ のとき，a_2 の値によらず，$a_{2^{k+1}+1} \geq a_1$ が成り立つことを示せ.

　[証明] 隣接二項間の関係を，$a_{n+1} > a_n$ を**増加**，$a_{n+1} < a_n$ を**減少**，$a_{n+1} = a_n$ を**停滞**と呼ぶことにする．また $a_{n+2} - a_{n+1} \neq a_{n+1} - a_n$ であるような a_{n+1} を**角（かど）**と呼ぶことにする．これは問題の漸化式の絶対値記号の中が負であることに等しい．角と角の間は等差数列である.
　等号成立条件について先に調べておこう．次の二つの場合は $a_{2^{k+1}+1} = a_1$ となる.

$$a_2 = 2^k, \text{または } a_2 = 2^k - 1,$$

前者は最初から停滞，つまり全項同一の値を持つ．後者は初項から $a_{2k} + 1$ まで公差 -1，$a_{2k} + 1$ 以後は公差 1 の等差数列となる．図式的に示すと図 1 のようになる.

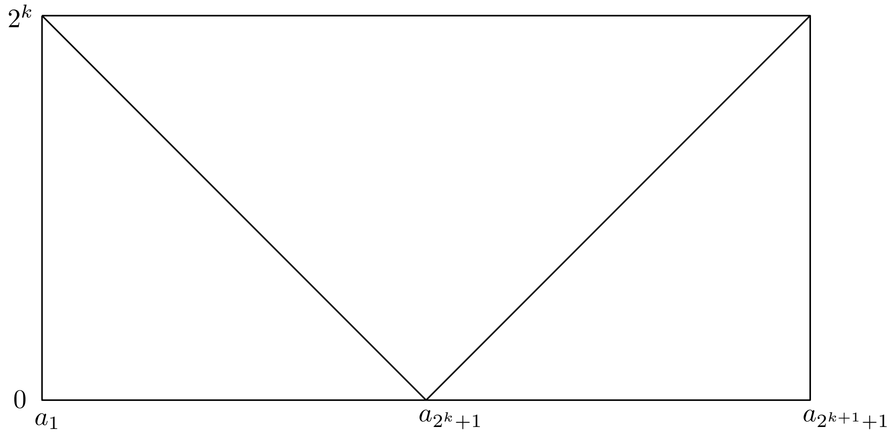

図 1

　以後，この二つの場合以外ではすべて $a_{2^{k+1}+1} > a_1$ となることを示す.

補題 1 この数列が一度増加すればその後増加し続け，その数列は公差が正の等差数列である．また増加から減少あるいは停滞に転ずることはない.

［証明］増加する間 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ が成り立つので明らか.　［補題の証明おわり］
　このことから，$a_2 \geq 2^k + 1$ のときは $a_{2^{k+1}+1} > a_1$ となることがわかる.

補題 2 この数列が停滞することは $a_2 = a_1 = 2^k$ の場合以外にはない.

［証明］もし $a_2 = a_1 = 2^k$ の場合以外で停滞することがあると仮定すると，補題 1 よりその最初の停滞より前は全て減少である．この最初の停滞がおこるのが a_{n+1}, a_{n+2} 間であるとすると,

$$a_{n+2} = -2a_{n+1} + a_n$$

かつ，$a_{n+1}=a_{n+2}$ であるので，

$$a_n=3a_{n+1}$$

$a_{n+1}=0$ とすると，全ての項が 0 となってしまうので $a_{n+1}\geq 1$ としてよい．よって a_{n+1} より前の角までの項は全て公差が $-2a_{n+1}$ であるので（なぜならば $a_{n+1}-a_n=a_n-3a_{n+1}=-2a_{n+1}$），項の値は ma_{n+1}（ただし $\underline{m\text{ は奇数}}$）とおける，これが初項と等しい場合は $m=1$ かつ $a_{n+1}=2^k$ の場合（結局 $a_2=a_1=2^k$ の場合に等しい）以外にはない．

さて，a_{n+1} の一つ手前の角を a_{l+1} とすると，

$$a_{l+2}=-2a_{l+1}+a_l$$

$a_{l+1}=ma_{n+1}, a_{l+2}=ma_{n+1}-2a_{n+1}$（ただし m は奇数）とおけるから，

$$a_l=ma_{n+1}-2a_{n+1}+2ma_{n+1}=(3m-2)a_{n+1}$$

$\underline{(3m-2)\text{ は奇数}}$ である．また, さらにその前の角までの間, その階差は $\underline{a_{n+1}\text{ の偶数倍}}$（なぜならば $a_{l+1}-a_l=ma_{n+1}-(3m-2)a_{n+1}=-2(m-1)a_{n+1}$）なので，項の値は全て $\underline{a_{n+1}\text{ の奇数倍}}$ である．よってこれらから停滞を伴う場合，全ての項は最小項の奇数倍であることがわかる．初項 2^k もこの条件を満たさなくてはならないが，最小項 2^k の 1 倍である以外にない（なぜならば 2^k は 1 以外の奇数を約数にもたないから）．これは最初に述べた $a_2=a_1=2^k$ の場合である．よってこの場合以外に停滞を伴うことはない．

［補題の証明おわり］

補題 3 この数列の a_{2^k+1}, a_{2^k+2} 間は停滞，または増加である．

［証明］もしこの間が減少とすると $a_{2^k+1}\geq 1$．またそれ以前は全て減少であるので $a_1\geq 2^k+1$ となり矛盾する．よって証明された．［補題の証明おわり］

補題 2 より，a_{2^k+1}, a_{2^k+2} 間が停滞する場合は全項が 2^k である場合のみである．また増加する場合は $a_{2^k+1}\geq 0$ より $a_{2^{k+1}+1}\geq 2^k$．等号が成立するのは $a_2=2^k-1$ の場合である．よって題意は証明された．

［問題の証明おわり］

この数列は大変面白い性質をもつ．初項が 2^k 以外の数であればどのような数でも第 2 項を適当な値にとれば，減少→停滞とすることができる．また，第 $2^{k+1}+1$ 項がとりうる値も変化に富んでいる．一般項を求めることは可能だろうか？