漸化式の問題 (2)

問題 1 曲線 $C: y = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$ に対して，以下のように数列 $\{a_n\}(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を作る．

・C の法線で原点を通るものと C の交点の x 座標を a_1 とする．

・$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，C の法線で点 $(a_n, 0)$ を通るものと C の交点の x 座標を a_{n+1} とする．

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^p a_n$ が存在し，0 でない有限値となるような定数 p の値と，そのときの極限値を求めよ．

［解］点 $\left(a_{n+1}, \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ における C の法線の方程式は

$$y - \frac{1}{a_{n+1}} = {a_{n+1}}^2(x - a_{n+1})$$

この法線は点 $(a_n, 0)$ を通るので，

$$-\frac{1}{a_{n+1}} = {a_{n+1}}^2(a_n - a_{n+1})$$

$${a_{n+1}}^3(a_{n+1} - a_n) = 1$$

この式は $n \in \mathbb{N}, a_1 = 1$ で定義されるが，$n = 0, 1, 2, 3, \cdots, a_0 = 0$ としても特に矛盾は生じない．

この左辺は図 1 のような長方形の面積に等しい．これらの長方形の面積は全て 1 であるので，

$$\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3(a_k - a_{k-1}) = n$$

この面積と，区間 $[0, a_n]$ において $y = x^3$ と x 軸とで囲まれる部分の面積，区間 $[-1, a_n]$ において $y = (x+1)^3$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を比べると，

$$\int_0^{a_n} x^3 dx < n < \int_{-1}^{a_n} (x+1)^3 dx$$

$$\frac{{a_n}^4}{4} < n < \frac{(a_n + 1)^4}{4}$$

$$\therefore \sqrt{2}n^{\frac{1}{4}} - 1 < a_n < \sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}$$

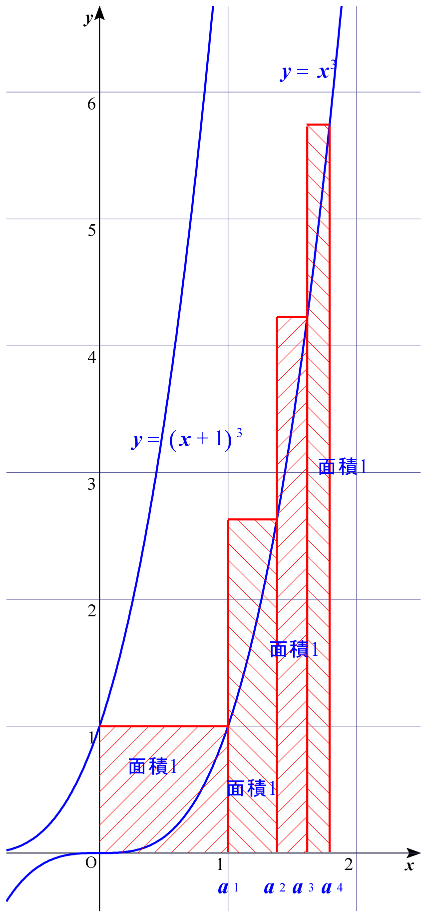

図 1

最右辺に $n^{-\frac{1}{4}}$ をかけると，

$$\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$$

同様に最左辺に $n^{-\frac{1}{4}}$ をかけて極限を調べると，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}} - 1\right) n^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{4}} a_n = \sqrt{2}$$

$p \neq -\dfrac{1}{4}$ では発散するか，0 に収束する．

$$\therefore p = -\frac{1}{4},\ \text{極限値は}\sqrt{2} \cdots Ans.$$

［別解］点 $\left(a_{n+1}, \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ における C の法線の方程式は

$$y - \frac{1}{a_{n+1}} = {a_{n+1}}^2(x - a_{n+1})$$

この法線は点 $(a_n, 0)$ を通るので，

$$-\frac{1}{a_{n+1}} = {a_{n+1}}^2(a_n - a_{n+1})$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{{a_{n+1}}^3} \quad (a_1 = 1)$$

ここで次の (1) ~ (3) を満たすような，$x > 0$ を定義域とする 2 回微分可能な関数 $f(x)$ を考える．

$$\begin{cases} f(n) = a_n & (1) \\ f(x+1) - f(x) = \dfrac{1}{\{f(x+1)\}^3} & (2) \\ f''(x) < 0 & (3) \end{cases}$$

ここで (3) のように決めた根拠は $a_{n+1} < a_{n+2}$ であることから

$$\frac{1}{{a_{n+1}}^3} = a_{n+1} - a_n > a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{{a_{n+2}}^3}$$

が成り立つからである．

$$f'(x+1) < \frac{f(x+1) - f(x)}{1} < f'(x)$$

より

$$f'(x+1) < \frac{1}{\{f(x+1)\}^3} < f'(x)$$

$$f'(x) < \frac{1}{\{f(x)\}^3} < f'(x-1)$$

よって，微分方程式

$$g'(x) = \frac{1}{\{g(x)\}^3}, h'(x-1) = \frac{1}{\{h(x)\}^3}$$

を満たす，ある $g(x), h(x)$ があって，

$$h(x) < f(x) < g(x)$$

が成り立つと考えてよい．それぞれの微分方程式を解くと

$$g(x) = (4x + C_1)^{\frac{1}{4}}, h(x) = (4x + C_2)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$f(1) = 1$ であることを考えると，

$$(4x)^{\frac{1}{4}} - 1 < f(x) < (4x)^{\frac{1}{4}},$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{4}} g(x) = \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{4}} h(x) = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{4}} f(x) = \sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{4}} a_n = \sqrt{2}$$

$$p = -\frac{1}{4}, \text{極限値は} \sqrt{2} \cdots Ans.$$

この別解の方が先にできたのであるが，これにはいくつかの欠陥がある．まずこのような $f(x)$ が存在するという前提で解いてあるが，存在するという証明が抜けている．また $h(x) < f(x) < g(x)$ に至るところに厳密さが欠けている．

若干の拡張をしてみよう．この問題の曲線 C を $y = \dfrac{1}{x^q} \quad (x > 0)$ に変えてみよう．$q < 0$ でもおそらく解けると思うが，一応 $q > 0$ ということにしよう．

$$-\frac{1}{{a_{n+1}}^q} = \frac{{a_{n+1}}^{q+1}}{q}(a_n - a_{n+1})$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{q}{{a_{n+1}}^{2q+1}} \quad (a_1 = 1)$$

$$f(x) \simeq (q(2q+2)x + C)^{\frac{1}{2q+2}}$$

よって

$$p = -\frac{1}{2(q+1)}$$

で，極限値は

$$\{2q(q+1)\}^{\frac{1}{2(q+1)}}$$