# コーシーの積分定理

**定理 1 (グリーンの定理)** $xy$ 平面上に正の向きの単純閉曲線 $C$ があり，$C$ の周と内部のつくる領域 $D$ で連続微分可能な実数値関数 $\phi(x, y)$ があるとき

$$\int_C \phi(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial \phi}{\partial y}dxdy, \quad \int_C \phi(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial \phi}{\partial x}dxdy$$

である．

［証明略］

**定理 2 (コーシー・リーマン方程式)**

$$z = x + iy, f(z) = u + iv$$

のとき，$f(z)$ が微分可能である条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

である．

［証明略］

**定理 3** 関数 $f(x)$ が，複素平面上の閉曲線 $C$ とその内部 $D$ で正則ならば

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

である．

［証明］$z = x + iy$ とすれば

$$dz = dx + idy$$

また $f(z) = u + iv$ とすれば

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C (u+iv)(dx+idy) \\ &= \oint_C \{(u+iv)dx + (-v+ui)dy)\}\end{aligned}$$

グリーンの定理より

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \iint_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy \\ &= \iint_D \left\{\left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - i\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}dxdy\end{aligned}$$

コーシー・リーマン方程式より

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

［証明おわり］

## 参考文献

[1] 小野寺嘉孝『なっとくする複素関数』（講談社，2000 年）