# コーシーの積分公式（第 2 定理）とグルサの定理

**定理 1** $C$ を正の向きの閉曲線とする．$C$ の周とその内部ほ含む領域を $D$ とする．$\alpha$ を $C$ 内の 1 点とする．$f(x)$ を $D$ で正則な関数とすると，

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(x)}{z-\alpha}dz$$

である．

［証明］$F(x) = \dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ とすると，

$$\mathrm{R}es(F(z),\alpha) = \lim(z-\alpha)F(z) = f(\alpha)$$

$$\therefore f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(x)}{z-\alpha}dz$$

［証明おわり］

**定理 2** $f(z)$ を領域 $D$ で正則な関数とすると

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}dz$$

である．

［証明］

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi ih}\int_C \left(\frac{f(z)}{z-\alpha-h} - \frac{f(z)}{z-\alpha}\right)dz \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi ih}\int_C \frac{hf(z)}{(z-\alpha-h)(z-\alpha)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \lim_{h\to 0}\frac{f(z)}{(z-\alpha-h)(z-\alpha)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}dz
\end{aligned}$$

［証明おわり］

**定理 3 グルサ (Goursat) の定理**　$f(z)$ を領域 $D$ で正則な関数とすると

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz$$

である．

［証明］数学的帰納法による．$n=1$ の場合は前定理による．

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(\alpha) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(\alpha+h)-f^{(n)}(\alpha)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{n!}{2\pi i h}\int_C\left(\frac{f(z)}{(z-\alpha-h)^{n+1}}-\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\right)dz \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{n!}{2\pi i h}\int_C\frac{\left\{(n+1)h(z-\alpha)^n-\dfrac{(n+1)n}{2}h^2(z-\alpha)^{n-1}+\cdots\right\}f(z)}{(z-\alpha-h)^{n+1}(z-\alpha)^{n+1}}dz \\
&= \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{(z-\alpha)^n f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}(z-\alpha)^{n+1}}dz \\
&= \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+2}}dz
\end{aligned}
$$

［証明おわり］

## 参考文献


[1] 寺田文行『複素関数の基礎』（サイエンス社，1998 年）

[2] 藤原毅夫「東京大学藤原研究室講義ノート」<http://fujimac.t.u-tokyo.ac.jp/lecture.html>