# ガウス記号と二次関数

ガウス記号と二次関数に関する問題であるが，ただ面倒なだけで特に数学的に面白いことは無い．しかし一応記録しておこう．

**問題 1**

$$x^2 + ax + b = [x] \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

の実数解の個数の最大値を求めよ．

[解]

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

とする．後述補題 1 より実数解の個数が 5 個以上あることは無いことがわかるので，4 個の場合について調べてみよう．補題 1 より $-\frac{a}{2}$ 以上の解が 4 個ある場合は無いので，4 個のうち 1 個は $-\frac{a}{2}$ より小さくなくてはならない．

$$y = x^2 + ax + b \tag{1}$$
$$y = [x] \tag{2}$$

の二つのグラフの交点を考える．補題 4 より (1) と (2) の 4 個の共有点がすべて (2) のグラフの別の線分上にあるということは無いので，最も左の線分に 2 個の交点，続く 2 つの線分に 1 つずつの交点がある場合のみが考えられる．2 個の交点をもつ線分をどこにとるかで，解はいろいろ考えられるので，とりあえず線分

$$y = 0(0 \leq x < 1)$$

における交点が 2 個，2 本の線分

$$y = 1(1 \leq x < 2), y = 2(2 \leq x < 3)$$

に 1 つずつの交点をもつ場合について調べよう．考えられる条件を列挙すると

$$\begin{cases} 0 < a^2 - 4b & (3) \\ 0 < -\dfrac{a}{2} < 1 & (4) \\ 0 \leq f(0) & (5) \\ 0 < f(1) \leq 1 & (6) \\ 1 < f(2) \leq 2 & (7) \\ 2 < f(3) & (8) \end{cases}$$

一部条件が重複しているが，これら全てが成り立つことが必要十分である．
(4) より

$$-2 < a < 0$$

(5) より

$$0 \leq b$$

(6) より

$$-1 < a + b \leq 0$$

(7) より

$$-3 < 2a + b \leq -2$$

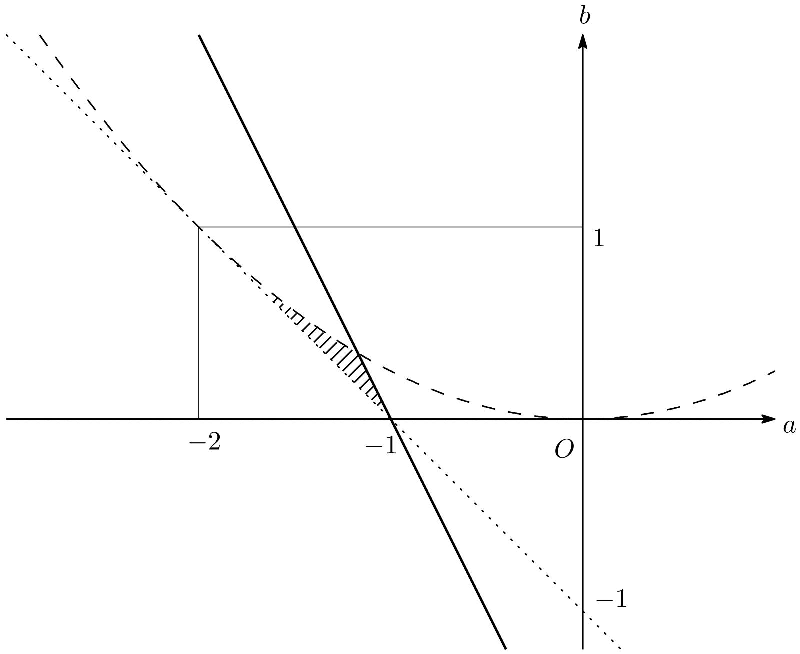
(8) より

$$-7 < 3a + b$$

重複している条件をとり除くと

$$\begin{cases} 0 < a^2 - 4b \\ -1 < a + b \\ 2a + b \leq -2 \\ -2 < a \end{cases}$$

となる．

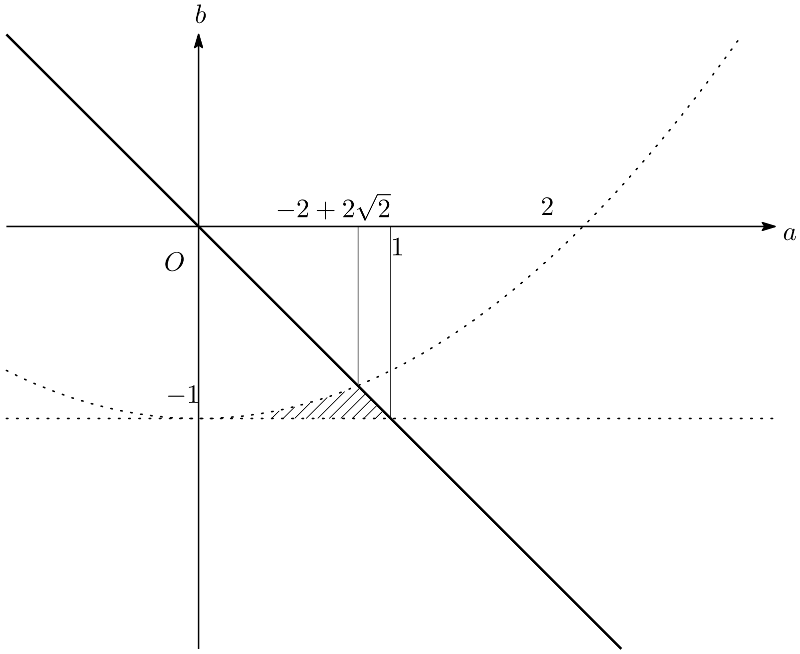



この条件を満たす放物線を $(n, n)(n \in \mathbf{I})$ だけ平行移動したグラフもやはり (2) と 4 個の交点をもつ．つまり

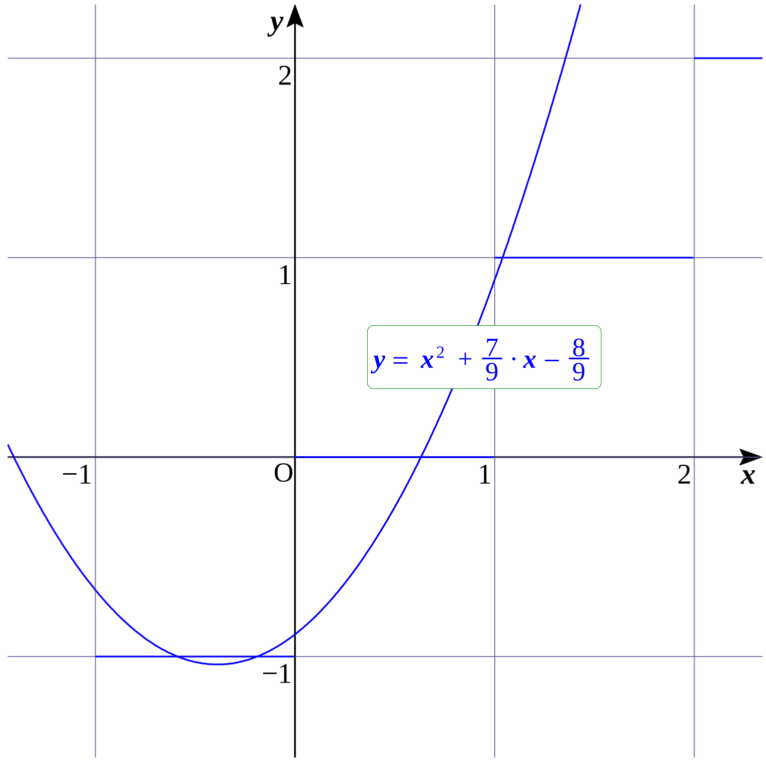
$$\begin{cases} 0 < a^2 - 4b - 4n \\ -1 < a + b + n^2 - n - an \\ 2a + b + n^2 - 3n - an \leq -2 \\ -2 < a - 2n \end{cases}$$

が 4 個の交点をもつ場合の全てである．$n = 1$ のときは

$$\begin{cases} 0 < a^2 - 4b - 4 \\ -1 < b \\ a + b \leq 0 \\ 0 < a \end{cases}$$




$a = \dfrac{7}{9}, b = -\dfrac{8}{9}$ のときのグラフを次に示す.



**補題 1**

$$x^2+ax+b=[x] \quad (a,b\in\mathbf{R})$$

の実数解の個数が 5 以上になることはない．

［証明］仮に実数解が 5 個以上あるとすると，そのうち $-\frac{a}{2}$ より小さい解は多くて 1 個なので，$-\frac{a}{2}$ 以上の解は 4 個以上あることになる．その $-\frac{a}{2}$ 以上の解を小さい順に $\alpha,\alpha_1.\alpha_2,\alpha_3$ とすると，補題 2 より，

$$\alpha_3-\alpha<\sqrt{3}$$

しかし，$y=f(x),y=[x]$ のグラフを考えると，4 点 $(\alpha,f(\alpha)),(\alpha_1,f(\alpha_1)),(\alpha_2,f(\alpha_2)),(\alpha_3,f(\alpha_3))$ は，$y=[x]$ のグラフの別の線分上にあるため，

$$\alpha_3-\alpha>2$$

よって矛盾をきたし，題意は証明された．［証明おわり］

**補題 2**

$$f(x)=k \quad (k\in\mathbf{I})$$

が実数解をもつとき，その実数解のうち大きい方（重解の場合は重解）を $\alpha$ とする．

$$f(x)=k+l \quad (l\in\mathbf{N})$$

の解のうち大きい方を $\alpha_l$ とすると，

$$\alpha_l-\alpha<\sqrt{l}$$

である．

［証明］

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b+4k}}{2}$$

$$\alpha_l=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b+4k+4l}}{2}$$

$$\alpha_l-\alpha=\frac{\sqrt{a^2-4b+4k+4l}-\sqrt{a^2-4b+4k}}{2}$$

補題 3 より

$$\alpha_l-\alpha<\sqrt{l}$$

［証明おわり］

$$\alpha_1-\alpha<1,\alpha_2-\alpha<\sqrt{2},\alpha_3-\alpha<\sqrt{3}$$

**補題 3** $p>0,q>0$ のとき，

$$\sqrt{p+q}-\sqrt{p}<\sqrt{q}$$

［証明］

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2-(\sqrt{p+q})^2=2\sqrt{pq}>0$$

$\sqrt{p}+\sqrt{q}>0,\sqrt{p+q}>0$ より，

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}>\sqrt{p+q}$$

$$\therefore \sqrt{p+q} - \sqrt{p} < \sqrt{q}$$

［証明おわり］

**補題 4**

$$y = x^2 + ax + b$$

のグラフと

$$y = [x] \tag{9}$$

の共有点が 4 個あり，なおかつその 4 個全てが (9) の別々の線分にあるということは無い．

［証明］4 個の共有点の $x$ 座標がが全て $-\frac{a}{2}$ 以上である場合は，補題 1 の証明の過程から明らかに存在しない．それでは，共有点の $x$ 座標の一つが $-\frac{a}{2}$ より小さい場合について調べてみよう．

もしこのような 4 つの共有点が存在したとして，それらの $x$ 座標を小さいほうから $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とする．

点 $(\alpha_3, f(\alpha_3)$ は点 $(\alpha_1, f(\alpha_1)$ より二つ右あるいはさらに右の (9) の線分上にあるので

$$\frac{f(\alpha_3) - f(\alpha_1)}{\alpha_3 - \alpha_1} < 2$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 + a < 2$$

$\alpha_3 > \alpha_1 + 1$ なので

$$-\frac{a}{2} < \alpha_1 < -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}$$

途中の計算は煩雑なので省略するが

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) > f(\alpha_1) - 1$$

これは関数 $y = f(x)$ の最小値が $f(\alpha_1) - 1$ より大きいことを意味し，

$$f(\alpha) \leq f(\alpha_1) - 1$$

と矛盾する．よって補題は証明された． ［証明おわり］