グリーンの定理

定理 1 xy 平面上に正の向きの単純閉曲線 C がり，C の周と内部のつくる領域 D で連続微分可能な実数値関数 $\phi(x,y)$ があるとき

$$\int_C \phi(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial\phi}{\partial y}dxdy, \quad \int_C \phi(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial\phi}{\partial x}dxdy$$

である．

［証明］図 1 のように閉曲線 C を上下 2 つに分け得る場合について証明する．

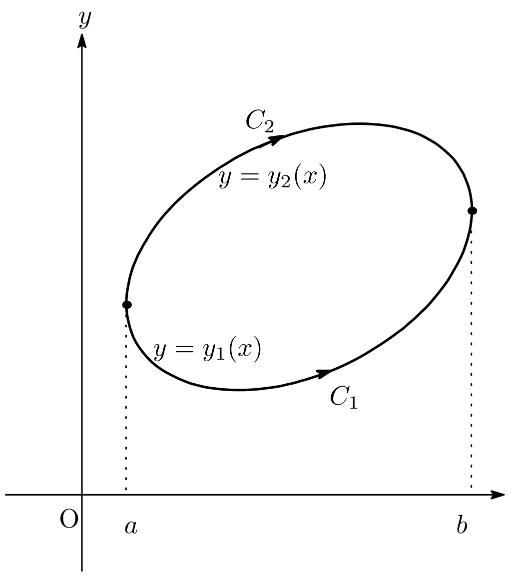

図 1

$$\int_{C_1} \phi(x,y)dx = \int_a^b \phi(x, y_1(x))dx$$
$$\int_{C_2} \phi(x,y)dx = \int_a^b \phi(x, y_2(x))dx$$

よって

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x,y)dx &= \int_{C_1} \phi(x,y)dx - \int_{C_2} \phi(x,y)dx \\ &= \int_a^b \phi(x,y_1(x))d - \int_a^b \phi(x,y_2(x))dx\end{aligned}$$

一方，二重積分の計算から，

$$\iint_D \frac{\partial \phi}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \{\phi(x, y_2(x)) - \phi(x, y_1(x))\} dx$$
$$= -\int_C \phi(x, y) dx$$

図 2 のように閉曲線 C を左右 2 つに分け後半の証明をする．

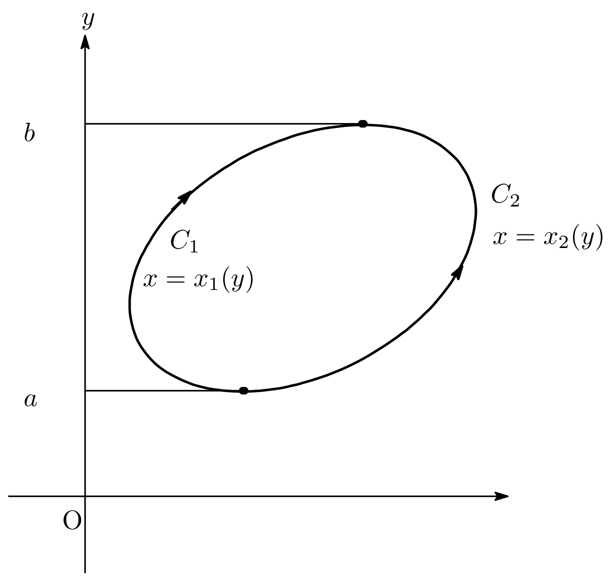

図 2

$$\int_{C_1} \phi(x, y) dy = \int_a^b \phi(x_1(y), y) dy$$
$$\int_{C_2} \phi(x, y) dy = \int_a^b \phi(x_2(y), y) dy$$

よって

$$\int_C \phi(x, y) dy = -\int_{C_1} \phi(x, y) dy + \int_{C_2} \phi(x, y) dy$$
$$= -\int_a^b \phi(x_1(y), y) dy + \int_a^b \phi(x_2(y), y) dy$$

一方，二重積分の計算から，

$$\iint_D \frac{\partial \phi}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right) dy$$
$$= \int_a^b \{\phi(x_2(y), y) - \phi(x_1(y), y)\} dy$$
$$= \int_C \phi(x, y) dy$$

図形が凹型の場合はいくつかに図形を分けて考えれば同様に証明できる．［証明おわり］

参考文献

[1] 寺田文行『複素関数の基礎』（サイエンス社，1998 年）