リュービルの定理と代数学の基本定理

定理 1 関数 $f(z)$ が全平面で正則で，かつ全平面で $|f(z)| \leq M$ のような定数 M が存在するとき，$f(z)$ は定数である．

［証明］α を任意の複素数とする．コーシーの積分公式（第 2 定理）により，α のまわりの半径 R の円周 C（左回り）を積分路とすると

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}dz$$

「留数」定理 4 より

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{R^2}|e^{i\theta}|dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{R}dz \leq \frac{M}{R}$$

この式は R がどんなに大きくても成り立つわけであるから．

$$f'(\alpha) = 0$$

つまり $f(z)$ は定数である．［証明おわり］

定理 2 複素係数の n 次方程式

$$f(z) = 0 \quad (n \geq 1)$$

は複素数の範囲で解を持つ．

［証明］$f(z) = 0$ が解をもたないとすると，

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

は全平面で正則である．$z \to \infty$ のとき，$f(z) \to \infty$ であるから，$g(z) \to 0$．十分大きい R をとると，$|z| \geq R$ において $g(z) \leq 1$ とすることができる．また，$|z| \leq R$ における $|g(z)|$ の最大値を m とする．1 と m のうち大きいほうを M とすれば

$$|g(z)| \leq M$$

定理 1 より $g(z)$ は定数．つまり $f(x)$ も定数となり，$n \geq 1$ と矛盾する．［証明おわり］

定理 3 複素係数の n 次方程式

$$f(z) = 0 \quad (n \geq 1)$$

は複素数の範囲で重複を許して n 個の解を持つ．

［証明］$f(z) = 0$ 少なくとも 1 つの解をもつ．その解を z_1 とすると因数分解して，$(z - z_1)g(z) = 0$ とかけ，$g(z)$ は $n - 1$ 次である．これが 1 次以上であれば，$g(z) = 0$ も解をもつので，$(z - z_1)(z - z_2)h(z) = 0$ とかける．これを続けていくと，

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\cdots(z - z_n)k = 0$$

とかける．k は 0 以外の定数である．このことから $f(z) = 0$ は n 個の解をもつ．［証明おわり］

参考文献

[1] 寺田文行『複素関数の基礎』（サイエンス社，1998 年）
[2] 藤原毅夫「東京大学藤原研究室講義ノート」<http://fujimac.t.u-tokyo.ac.jp/lecture.html>