複素積分

定義 1 $\alpha = z(a)$ と $\beta = z(b)$ を結ぶ積分路 C に対して

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

定理 1 点 z_0 を中心とし，半径 r の円周を C とする．また，n を整数とするとき，

$$n \neq -1 \quad \text{ならば} \quad \int_C (z-z_0)^n dz = 0$$
$$n = -1 \quad \text{ならば} \quad \int_C (z-z_0)^n dz = 2\pi i$$

［証明］$z_0 = a + bi$ とすると，C は

$$x = a + r\cos\theta, \quad y = b + r\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と表せる．

$$z - z_0 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \quad z'(\theta) = ire^{i\theta}$$

であるから，

$$\int_C (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} ire^{i\theta} d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

$n \neq -1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta d\theta \\ &= \left[\frac{1}{n+1}\{\sin(n+1)\theta - i\cos(n+1)\theta\}\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

$n = -1$ のとき

$$\int_C (z-z_0)^{-1} dz = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

［証明おわり］

問題 1 積分路 C を半円 $z = z_0 + re^{i\theta}(\theta : 0 \to \pi)$ とするとき，

$$\int_C (z-z_0)^n dz$$

を求めよ．

［解］

$$\int_C (z-z_0)^n dz = ir^{n+1} \int_0^{\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

$n \neq -1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_C (z-z_0)^n dz &= ir^{n+1}\left[\frac{1}{n+1}\{\sin(n+1)\theta - i\cos(n+1)\theta\}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{r^{n+1}}{n+1}\left[\cos(n+1)\theta\right]_0^{\pi}\end{aligned}$$

n が偶数のとき

$$\int_C (z - z_0)^n dz = -\frac{2r^{n+1}}{n+1}$$

n が奇数（ただし，$n \neq -1$）のとき

$$\int_C (z - z_0)^n dz = 0$$

$n = -1$ のとき

$$\int_C (z - z_0)^n dz = i \int_0^{\pi} d\theta = \pi i$$

参考文献

[1] 寺田文行『複素関数の基礎』（サイエンス社，1998 年）