複素積分 (2)

問題 1 複素積分を用いて，$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\cos\theta+5}$ を求めよ．

［解］$C: z=e^{i\theta}(0\leq\theta\leq 2\pi)$ とする．

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\cos\theta+5} \tag{1}$$

とおき，これを満たす $f(z)$ を以下で見つける．

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z)\frac{dz}{d\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} f(z)ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} f(z)izd\theta$$

一方

$$\frac{1}{4\cos\theta+5} = \frac{1}{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+5} = \frac{1}{2z+5+2z^{-1}}$$

であるから，(1) より，

$$f(z)iz = \frac{1}{2z+5+2z^{-1}}$$

であることが (1) を満たす十分条件である．

$$f(z) = \frac{-i}{2z^2+5z+2} = \frac{-i}{2\left(z+\dfrac{1}{2}\right)(z+2)}$$

$f(z)$ は二つの孤立特異点 $-\dfrac{1}{2}, -2$ をもつが，C の内部にあるのは $-\dfrac{1}{2}$ のみである．

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{1}{2}\right) = 2\pi i\cdot\frac{-i}{2\left(-\dfrac{1}{2}+2\right)} = \frac{2}{3}\pi\cdots Ans.$$

問題 2 複素積分を用いて，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$ を求めよ．

［解］$C: z=e^{i\theta}(0\leq\theta\leq 2\pi)$ とする．

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \tag{2}$$

とおき，これを満たす $f(z)$ を以下で見つける．

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z)\frac{dz}{d\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} f(z)ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} f(z)izd\theta$$

一方

$$\cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(z^2+2+\frac{1}{z}\right)$$

であるから，(1) より，

$$f(z)iz = \frac{1}{4}\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right)$$

であることが (1) を満たす十分条件である．

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(-iz+\frac{-2i}{z}+\frac{-i}{z^3}\right)$$

$f(z)$ は孤立特異点 0 をもち，留数は $-\dfrac{i}{2}$ である．よって

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)=\pi\cdots Ans.$$

問題 3 複素積分を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$ を求めよ．

［解］

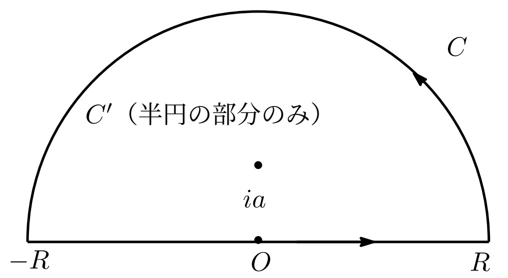


図 1

積分路を図 1 のように定めると

$$\int_C\frac{dz}{z^2+a^2}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+a^2}+\int_{C'}\frac{dz}{z^2+a^2}$$

留数定理より

$$\int_C\frac{dz}{z^2+a^2}=2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{1}{z+ai}=2\pi i\frac{1}{2ia}=\frac{\pi}{a}$$

$C':z=Re^{i\theta}(0\le\theta\le\pi)$ であるから

$$\int_{C'}\frac{dz}{z^2+a^2}=\int_0^{\pi}\frac{izd\theta}{z^2+a^2}=\int_0^{\pi}\frac{Rie^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta}+a^2}$$

この被積分関数は $R\to\infty$ のとき 0 に近づく（ここ，もう少し論証が必要かもしれない）．つまりこの積分自体も 0 に近づく．よって，求める積分も $R\to\infty$ によって $\displaystyle\int_C\frac{dz}{z^2+a^2}$ つまり $\dfrac{\pi}{a}$ に近づく．

（答）$\dfrac{\pi}{a}$

問題 4 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx \quad (a>0,k>0)$ を求めよ．

［解］積分路を図 1 のように定めると

$$\int_C\frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2}=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ikx}dx}{x^2+a^2}+\int_{C'}\frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2}$$

留数定理より

$$\int_C\frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2}=2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{e^{ikz}}{z+ai}=2\pi i\frac{e^{-ak}}{2ia}=\frac{e^{-ak}\pi}{a}$$

$C' : z = Re^{i\theta}(0 \leq \theta \leq \pi)$ であるから

$$\begin{aligned}\int_{C'} \frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2} &= \int_0^{\pi} \frac{e^{ikz}izd\theta}{z^2+a^2} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{e^{ikRe^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta}+a^2} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{e^{ikR(\cos\theta+i\sin\theta)}Rie^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta}+a^2} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{e^{ikR\cos\theta}e^{-kR\sin\theta}Rie^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta}+a^2}\end{aligned}$$

$R \to \infty$ のとき

$$|e^{ikR\cos\theta}| = 1$$

$k > 0$ なので,

$$e^{-kR\sin\theta} \to 0 \tag{3}$$

前問より

$$\frac{Rie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+a^2} \to 0$$

被積分関数全体は 0 に近づく．つまりこの積分自体も 0 に近づく．よって，求める積分も $R \to \infty$ によって $\displaystyle\int_C \frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2}$ つまり $\dfrac{e^{-ak}\pi}{a}$ に近づく．

$$\text{（答）}\ \frac{e^{-ak}\pi}{a}$$

問題 5 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx \quad (a > 0, k < 0)$ を求めよ．

［解］この問題は $k < 0$ であることを除けば，前問題と全く同じである．しかし前問 (3) が成り立たないので，同様に解くことはできない，そこで積分路を上側半円ではなく図 2 のように下側半円とする．

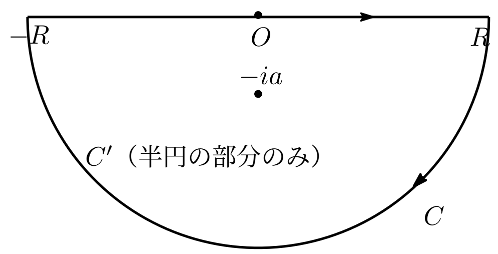


図 2

$$\int_C \frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ikx}dx}{x^2+a^2} + \int_{C'} \frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2}$$

この式は前問と全くおなじであるが，積分路が通常の左回りではなく，右回りになっていることに注意を払わなくてはいけない．よって

$$\int_C \frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2} = -2\pi i \lim_{z\to -ai} \frac{e^{ikz}}{z-ai} = -2\pi i \frac{e^{ak}}{-2ia} = \frac{e^{ak}\pi}{a}$$

$C' : z = Re^{i\theta}(0 \geq \theta \geq -\pi)$ であるから

$$\int_{C'} \frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2} = \int_0^{-\pi} \frac{e^{ikz}izd\theta}{z^2+a^2}$$
$$= \int_0^{-\pi} \frac{e^{ikR\cos\theta}e^{-kR\sin\theta}Rie^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta}+a^2}$$

$R \to \infty$ のとき

$$|e^{ikR\cos\theta}| = 1$$

$k < 0$ なので，

$$e^{-kR\sin\theta} \to 0$$

前問より

$$\frac{Rie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+a^2} \to 0$$

被積分関数全体は 0 に近づく．つまりこの積分自体も 0 に近づく．よって，求める積分も $R \to \infty$ によって $\displaystyle\int_C \frac{e^{ikz}dz}{z^2+a^2}$ つまり $\dfrac{e^{ak}\pi}{a}$ に近づく．

$$（答）\ \frac{e^{ak}\pi}{a}$$

一般に

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

を $f(x)$ の**フーリエ変換**とよぶ．

問題 6 複素積分を用いて $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ を求めよ．

［解］特異点を避けて図 3 のように積分路をとる．

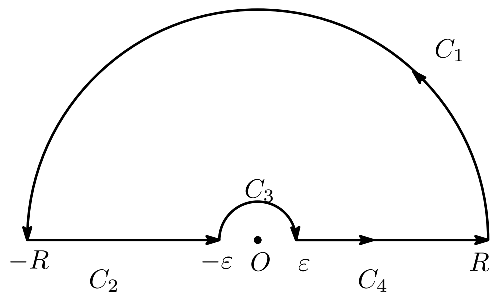


図 3

$z = x + yi$ のとき $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ なので，

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i\sin x))$$

そこで $\dfrac{-ie^{iz}}{z}$ を f とおいてもいいのだが，計算を楽にするために

$$f = \frac{e^{iz}}{z}$$

とおくことにしよう．C_1 では，円周上なので $z = Re^{i\theta}$ とおける．

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} f dz &= \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{Re^{i\theta}} dz \\
&= \int_0^\pi \frac{e^{iz}}{Re^{i\theta}} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{e^{iz}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\
&= \int_0^\pi ie^{iz} d\theta \\
&= i\int_0^\pi e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta = i\int_0^\pi e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta \\
\left|\int_{C_1} f dz\right| &\leq \int_0^\pi \left|e^{iR\cos\theta}\right| \left|e^{-R\sin\theta}\right| d\theta \\
&= \int_0^\pi \left|e^{-R\sin\theta}\right| d\theta \\
&= \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta
\end{aligned}
$$

$\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi} \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから（図 4）

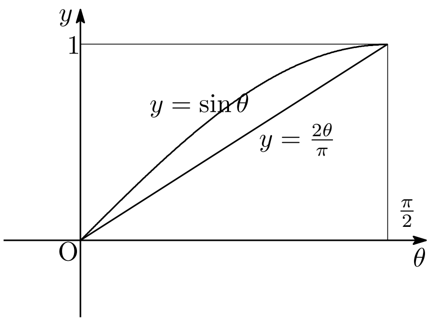


図 4

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2\theta}{\pi}} d\theta \\
&= -\frac{\pi}{2R} \left[e^{-R\frac{2\theta}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}) \\
&< \frac{\pi}{2R} \to 0 (R \to \infty)
\end{aligned}
$$

同様に C_3 では，$z=\varepsilon e^{i\theta}$ とおける．

$$\begin{aligned}\int_{C_3} f dz &= \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{\varepsilon e^{i\theta}} dz \\ &= i\int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta \\ &= i\int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon\cos\theta}e^{-\varepsilon\sin\theta}d\theta \\ &= i\int_{\pi}^{0} e^{-\varepsilon\sin\theta}(\cos(\varepsilon\cos\theta)+i\sin(\varepsilon\cos\theta))d\theta\end{aligned}$$

$\varepsilon\to 0$ のとき

$$\varepsilon\cos\theta\to 0, \varepsilon\sin\theta\to 0, \cos(\varepsilon\cos\theta)\to 1, \sin(\varepsilon\cos\theta)\to 0, e^{-\epsilon\sin\theta}\to 1$$

$$\therefore \int_{C_3} f dz \to i\int_{\pi}^{0} d\theta = -i\pi$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} f dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos x + i\sin x}{x}dx \\ &= \int_{R}^{\varepsilon} \frac{\cos x - i\sin x}{x}dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{-\cos x + i\sin x}{x}dx\end{aligned}$$

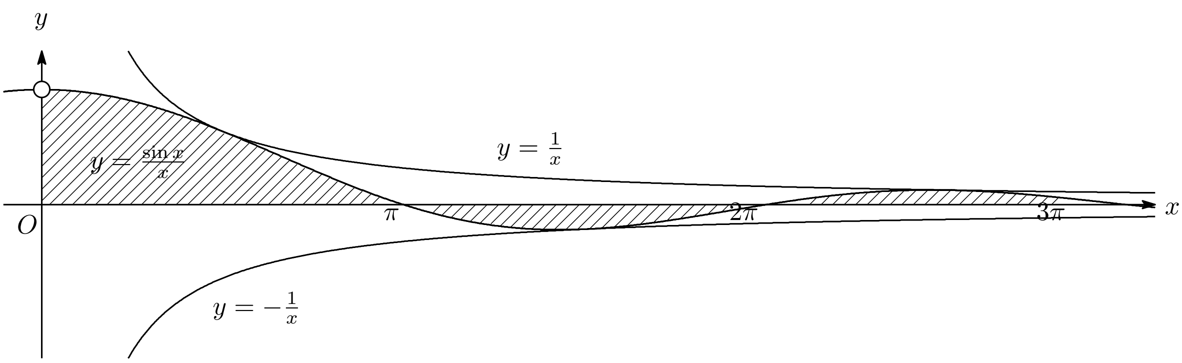
$$\int_{C_4} f dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos x + i\sin x}{x}dx$$

$$\int_{C_2} f dz + \int_{C_4} f dz = 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}dx$$

$\varepsilon\to 0, R\to\infty$ のとき

$$0 - i\pi + 2i\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = 0$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} \cdots (Ans.)$$



$\frac{\sin x}{x}$ のグラフ

$\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ は**正弦積分 (sine integral)** と呼び，$\mathrm{Si}(x)$ で表す.

問題 7 複素積分を用いて $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1}$ を求めよ.

［解］図 5 のように積分路 C をとる．特異点を調べると，$z^n+1=0$ の解は $z=e^{\frac{(2n-1)\pi i}{2n}}$ であるから，C の内部にあるのは $e^{\frac{\pi i}{n}}$ だけである．この特異点における留数は

$$\mathrm{Res}(e^{\frac{\pi i}{n}}) = \frac{1}{n(e^{\frac{\pi i}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(e^{\pi i - \frac{\pi i}{n}})} = -\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}$$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{z^n+1} = -\frac{2\pi i e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}$$

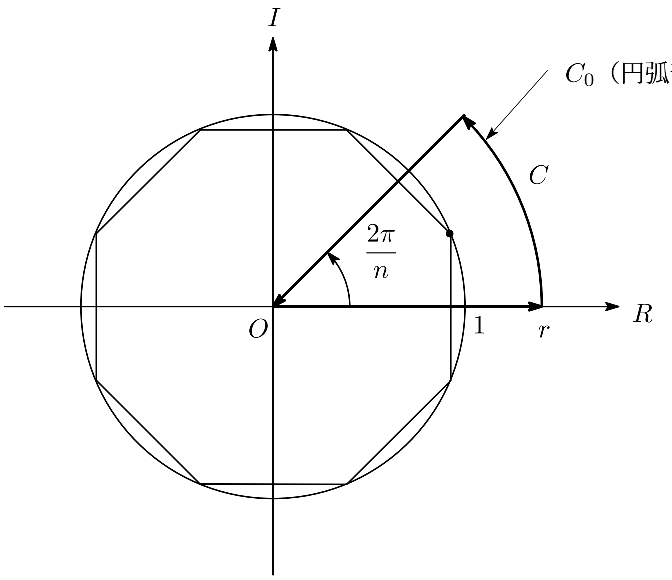


図 5

円弧部分の積分は

$$\left|\int_{C_0} \frac{dz}{z^n+1}\right| \leq \frac{1}{r^n-1}\cdot\frac{2\pi i}{n} \to 0(r\to\infty)$$ 図 6 および「留数」定理 5 参照

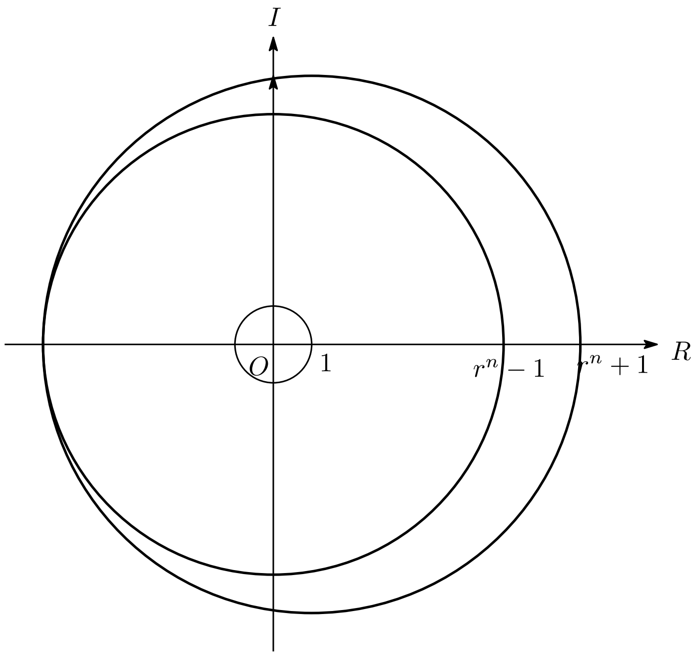


図 6

$$\int_C \frac{dz}{z^n+1} = \int_{C_0} \frac{dz}{z^n+1} + \int_0^r \frac{dx}{x^n+1} - e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^r \frac{dx}{x^n+1}$$

右辺第一項は 0 に収束するので

$$-\frac{2\pi i e^{\frac{\pi i}{n}}}{n} = \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1} = \frac{-\frac{2\pi i e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}}} = \frac{2\pi i e^{\frac{\pi i}{n}}}{n(e^{\frac{2\pi i}{n}}-1)} = \frac{2\pi i}{n(e^{\frac{\pi i}{n}}-e^{-\frac{\pi i}{n}})} = \frac{2\pi i}{n \cdot 2i \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi}{n \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} \cdots (Ans.)$$

参考文献

[1] 寺田文行『複素関数の基礎』（サイエンス社，1998 年）

[2] 小野寺嘉孝『なっとくする複素関数』（講談社，2000 年）