共通接線と曲率半径

問題 1 2 本の曲線

$$C : y = e^x + a$$
$$D : y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$$

を考える．a は C, D に 2 本共通接線を引けるような実数とする．C, D に引いた 2 本の共通接線と C との接点を $p, q \quad (p < q)$，D との接点を $r, s \quad (r < s)$ とするとき

$$\lim_{a \to -1+\sqrt{3}+0} \frac{s - r}{q - p}$$

を求めよ．

［解］

$$f(x) = e^x + a$$
$$g(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

とする．2 本の共通接線のうち，点 $(p, f(p))$ を接点とするものを l, 点 $(q, f(q))$ を接点とするものを m とする．

$$f'(x) = e^x$$
$$g'(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

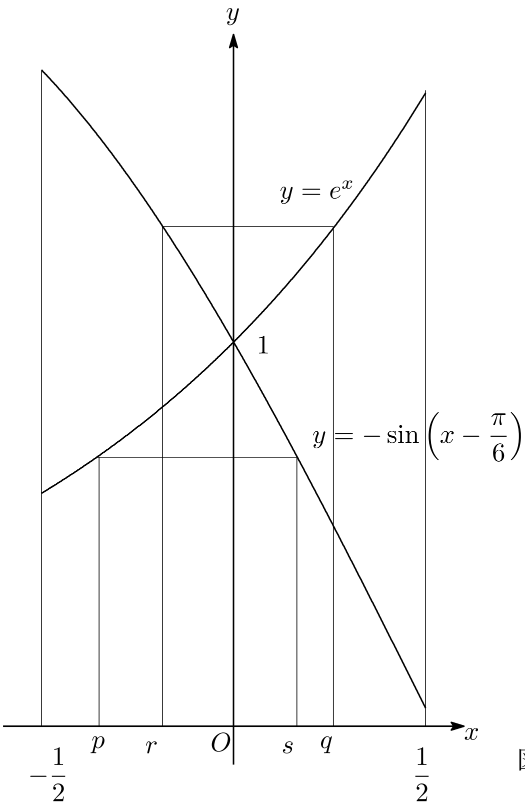

図 1

のグラフ（図 1）より，C, D の 2 本の共通接線のうち 1 本の上にある 2 つの接点の x 座標は異符号である（一方が y 軸の左にあれば一方は右にある．）ことは明らか．

また，$pq < 0, rs < 0$ もほとんど明らかであるが，以下そのことを証明する．

もし $p < 0, q < 0$ とすると，$p < q, f''(x) = e^x > 0$ であるから，$f'(p) < f'(q)$．また点 $q, f(q)$ は l より上（y 軸方向）にある．よって，$x > 0$ において m 上の点は全て l より上にある．よって m と D の接点も l より上にある．しかしながら $g''(x) < 0 \quad \left(-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right)$ であるので，D 上の点は全て l より下（y 軸の負の方向）にある．よって，m は D と接することができない．よって，$p < 0, q < 0$ ではない．

$p > 0, q > 0$ でないことも同様に証明できる．よって，

$$p < 0, q > 0, r < 0, s > 0$$

である．つまり 2 点 $(p, f(p)), (s, g(s))$ が同一接線上にあり，$(q, f(q)), (r, g(r))$ が他方の接線上にあることになる．

次に，$a \to -1 + \sqrt{3} + 0$ のとき，$p \to -0, q \to +0, r \to -0, s \to +0$ であることもほとんど明らかではあるが証明してみよう．直線 l は

$$\begin{aligned} y - e^p - a &= e^p(x - p) \\ y &= e^p x + e^p(1 - p) + a \end{aligned} \tag{1}$$

と表せるが，l は 2 曲線 C, D の間を通るので (1) の切片は限りなく $a + 1$ に近づく. つまり

$$\begin{aligned} e^p(1 - p) + a &\to a + 1 \\ e^p(1 - p) &\to 1 \end{aligned}$$

左辺の増減を調べ，グラフをかけば，図 2 のようになり，

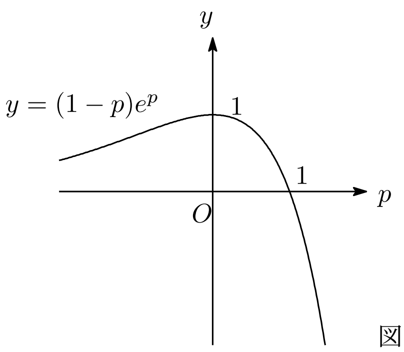

図 2

確かに p は 0 に近づくことが言える．同様に $q \to 0$ でもある．当然 $r \to 0, s \to 0$ も言える．よって図 1 の $y = f'(x), y = g'(x)$ のグラフの傾き，つまり

$$f''(x), g''(x)$$

を考えることにより，

$$\lim_{a \to -1+\sqrt{3}+0} \frac{s}{p} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{a \to -1+\sqrt{3}+0} \frac{r}{q} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \underline{\lim_{a \to -1+\sqrt{3}+0} \frac{s-r}{q-p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots (Ans.)}$$

この解答では本当に共通接線が 2 本引けるのかについて論じていないので，そのことについて調べてみよう．

共通接線の C との接点を $(t, f(t))$，D との接点を $(u, g(u))$ とすると，この接線は次のように 2 通りに表せる．

$$y - e^t - a = e^t(x-t)$$
$$y - 2\cos\left(u - \frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(u - \frac{\pi}{6}\right)(x-u)$$

この 2 つは同一の直線なので，

$$\begin{cases} e^t = -2\sin\left(u - \frac{\pi}{6}\right) & (2) \\ -te^t + e^t + a = 2u\sin\left(u - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(u - \frac{\pi}{6}\right) & (3) \end{cases}$$

(2),(3) より

$$2\sin\left(u - \frac{\pi}{6}\right)\left[1 + u - \log\left\{-2\sin\left(u - \frac{\pi}{6}\right)\right\}\right] + 2\cos\left(u - \frac{\pi}{6}\right) - a = 0$$

というとんでもない方程式が出てくるが，左辺を微分すると，意外と簡単な

$$-2\cos\left(u - \frac{\pi}{6}\right)\left[\log\left\{-2\sin\left(u - \frac{\pi}{6}\right)\right\} - u\right]$$

という式になり，$u = 0$ で極小となることを言うことはそれほど困難ではない．左辺のグラフを描くと $(a = \sqrt{3} - 1)$，図 3 のようになる．

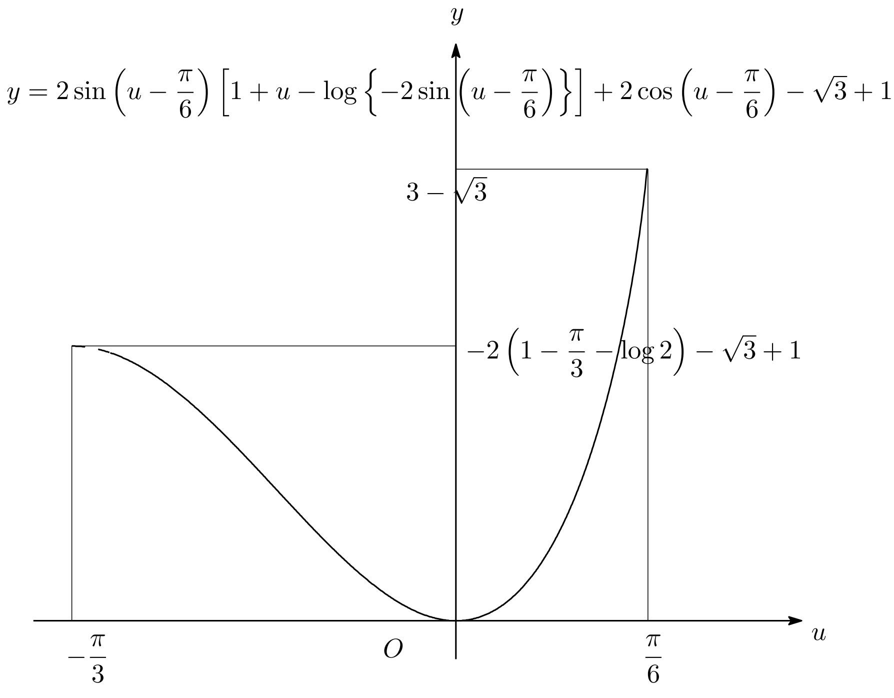

図 3

確かに共通接線が 2 本引け，その接点は $x=0$ に向かって近づくことが観察できる．

さて，十分近い二つの曲線をその近傍で半径 R_1, R_2 の円で近似できることを認めれば，以上の論証は随分簡単となる．共通接線が 2 本引けることも当然であるし，その接点間の距離の比も R_1, R_2 の比と同一となる．問題 1 において R_1 を $y=f(x)$ の，R_2 を $y=g(x)$ の曲率半径（いずれも $x=0$ 付近）とすれば，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to -1+\sqrt{3}+0}\frac{s-r}{q-p} &= \frac{R_2}{R_1}\\ &= \frac{(1+g'(0))^{\frac{3}{2}}|f''(0)|}{|g''(0)|(1+f'(0))^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{|f''(0)|}{|g''(0)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

2 曲線の共通接線を引くことはそれほど簡単でない．この問題のように曲線の方程式が与えられた場合は別として，一般の場合は有限回の作業で接線を決めることはできない．