関数の極限

1 収束

定義 1 任意の正数 ε について

$$x > X \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

となるような X が存在するとき，A を $f(x)$ の**極限**と呼び，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

と書く．また，$f(x)$ は A に**収束する**とも言う．

問題 1 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ を証明せよ．

［解］任意の正数 ε について，

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

より

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

逆に $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ならば，$\left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$ であるから，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ［証明おわり］

つまり，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

を証明するためには，不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

を解いて，

$$x > X$$

という形の不等式を導き，逆に

$$x > X \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

が真であることを確かめたら

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

が証明されたことになる．つまり，収束するかどうかを証明することは，<u>不等式の変形に帰着する</u>．これで，「近づく」という数学的にはあいまいな表現はより厳密に定義されたわけである．

問題 2 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ を証明せよ．

［解］任意の正数 ε について

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| < \varepsilon$$

とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$$

より

$$\sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\therefore x > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

逆に $x > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ ならば，これまでの変形を逆にたどって $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right| < \varepsilon$ が成り立つから $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ ［証明おわり］

2　収束の速さ

問題 1 と 2 で証明したように，$\dfrac{1}{x}$ と $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ はともに 0 に収束するが，同じように 0 に近づくわけではなく，**速さ** が違う．同じ $\varepsilon > 0$ に対して，$\dfrac{1}{x}$ は $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$ において，$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は $x > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ において，それぞれ，

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| < \varepsilon$$

となるわけである．十分 ε が小さいときは

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon^2}$$

であるから，$\dfrac{1}{x}$ の方が手前から $\pm\varepsilon$ の幅に収まってしまうわけである．つまり

$$\frac{1}{x} \text{ の方が} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ より収束のしかたが速い}$$

ことが言えるわけである．一般に $n > m > 0$ のとき

$$\boldsymbol{\frac{1}{x^n}} \textbf{ の方が} \boldsymbol{\frac{1}{x^m}} \textbf{より収束のしかたが速い}$$

3　多くの関数の収束

定理 1 n 個の関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x)$ が極限 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ に収束するとき，任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について，$x > X$ のとき，

$$\begin{gathered} |f_1(x) - A_1| < \varepsilon, \\ |f_2(x) - A_2| < \varepsilon, \\ |f_3(x) - A_3| < \varepsilon, \\ \cdots\cdots \\ |f_n(x) - A_n| < \varepsilon \end{gathered}$$

となるような X が存在する．

［証明］$x > X_k$ であるとき，$|f_k(x) - A_k| < \varepsilon$ とする．$X_1, X_2, X_, \cdots, X_n$ のうちで最大であるものを X とすると，定理を満たす．［証明おわり］

つまり，最も収束の遅いものにあわせればよいわけである．

この定理は有限の n について述べたわけで，無限個の場合は成り立たない．

4　和，差の極限

定理 2

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$$

［証明］

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A, \lim_{x\to\infty} g(x) = B$$

とする．

$$f(x) = f_1(x) + A, g(x) = g_1(x) + B$$

とすると，

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = 0, \lim_{x\to\infty} g_1(x) = 0$$

であることはほぼ明らか（証明略）．さらに言えば

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} f_1(x) = 0$$

つまりこの定理は

$$\lim_{x\to\infty}\{f_1(x)+g_1(x)\} = 0$$

を証明すればよいことになる．今，任意の $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ を与え，

$$x > X_1 \text{ において } |f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$x > X_2\text{において } |g_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

であるとする．X_1, X_2 のうちで大きい方を X とすると，$x > X$ について

$$|f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\text{かつ } |g_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f_1(x) + g_1(x)| \leq |f_1(x)| + |g_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\{f_1(x)+g_1(x)\} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$$

［証明おわり］

この証明のポイントとなるのはいわゆる三角方程式である．

定理 3

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\} = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty} g(x)$$

［証明］

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = B$$

とすると，任意の $\epsilon > 0$，ある X について，$x > X$ のとき

$$|g(x) - B| < \varepsilon$$

$$|\{-g(x)\} - (-B)| = |-\{g(x) - B\}\,| = |g(x) - B| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\{-g(x)\} = -B$$

よって，前定理の $g(x)$ を $-g(x)$ に置き換えることにより証明は完結する．［証明おわり］

5　積の極限

定理 4

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)\lim_{x\to\infty} g(x)$$

［証明］

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A, \lim_{x\to\infty} g(x) = B, f(x) = f_1(x) + A, g(x) = g_1(x) + B$$

とすると，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) &= \lim_{x\to\infty}\{f_1(x) + A\}\{g_1(x) + B\}\\ &= \lim_{x\to\infty}\{f_1(x)g_1(x) + Bf_1(x) + Ag(x) + AB\}\\ &= \lim_{x\to\infty} f_1(x)g_1(x) + \lim_{x\to\infty} Bf_1(x) + \lim_{x\to\infty} Ag(x) + AB\end{aligned}$$

第 1 項から考えよう．任意の $\varepsilon > 0$, ある X を考え，$x > X$ において

$$|f_1(x)| < \varepsilon, |g_1(x)| < \varepsilon$$

とする．

$$|f_1(x)g_1(x)| = |f_1(x)||g_1(x)| < \varepsilon^2 < \varepsilon$$

ただし，この不等式が成り立つのは十分小さい ε についてである．よって，

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)g_1(x) = 0$$

もっと言えば，$f_1(x)g_1(x)$ は $f_1(x), g_1(x)$ 単独より速く収束する．次に第 2 項について考えよう．$B = 0$ の場合はそもそも 0 であるから証明の必要はない．そこで $B \neq 0$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ を与え，さらに $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|B|}$ とする．この ε_1 について $x > X_1$ のとき

$$|f_1(x)| < \varepsilon_1$$

とする．

$$|Bf_1(x)| < |B|\varepsilon_1 = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} Bf_1(x) = 0$$

第 3 項も同様である．

$$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = AB$$

［証明おわり］

6 逆数の極限

定理 5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)}$$

［証明］この定理が一連の定理の中で最も証明が難しい．

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\neq 0$$

とする．任意の $\varepsilon>0$ を与える．ここで

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon|A|^2}{1+\varepsilon|A|} \tag{1}$$

という ε_1 を考える．いささか天下り式であるが，こう置いた理由は後ほど判明する．この ε_1 に対して $x>X$ において $|f(x)-A|<\varepsilon_1$ となる X が存在する．このとき ($x>X$ のとき)

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right|=\left|\frac{A-f(x)}{Af(x)}\right|=|A-f(x)|\cdot\frac{1}{|A|}\cdot\frac{1}{|f(x)|}<\varepsilon_1\cdot\frac{1}{|A|}\cdot\frac{1}{|f(x)|} \tag{2}$$

ここで

$$A-\varepsilon_1<f(x)<A+\varepsilon_1$$

であるから，

$$|A|-\varepsilon_1<|f(x)|<|A|+|\varepsilon_1|$$

これを用いて (2) の続きを行うと，

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right|<\frac{\varepsilon_1}{|A|(|A|-\varepsilon_1)} \tag{3}$$

ここで $|A|>\varepsilon_1$ でないと都合が悪いが，(1) より

$$|A|-\varepsilon_1=|A|-\frac{\varepsilon|A|^2}{1+\varepsilon|A|}=\frac{|A|}{1+\varepsilon|A|}>0$$

であるから，$|A|>\varepsilon_1$ であることはいえるのである．(3) に (1) を代入して，

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right|<\frac{\dfrac{\varepsilon|A|^2}{1+\varepsilon|A|}}{|A|\left(|A|-\dfrac{\varepsilon|A|^2}{1+\varepsilon|A|}\right)}=\varepsilon$$

$$\therefore\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{A}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)}$$

［証明おわり］

参考文献

[1] 遠山啓『微分と積分－その思想と方法－』（日本評論社，1970 年）