最大容積問題 (3)

正方形の紙を使った最大容積の問題はいろいろなバリエーションが考えられる．たとえばはさみをまったく使わないで単に「折る」だけでかなりの良い成績が得られる．このことについて検討してみよう．まず具体的な数値を入れた場合について考えてみる．

問題 1　図 1 のように 1 辺の長さが 12 の正方形を折り, 図 2 のような容器を作る．容積 V を求めよ．

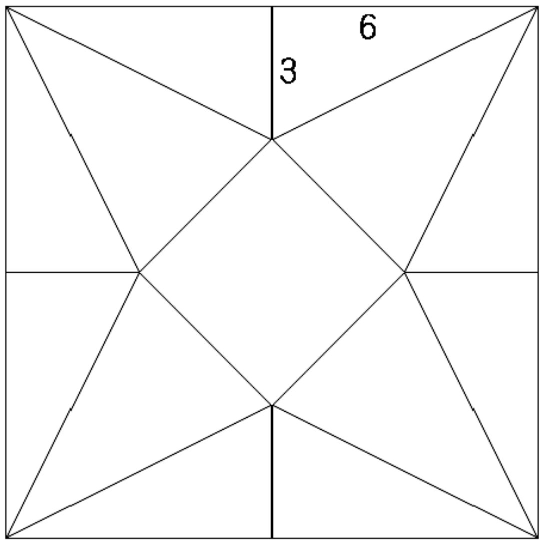

図 1

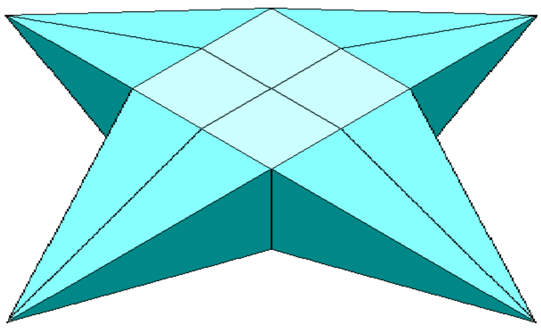

図 2

［解］図形は直方体と三角錐の組み合わせなので，その容積を求めることは容易である．直方体の部分の体積を V_1 とすると，

$$V_1 = 6 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 3 = 54$$

また，四角錐の高さを h とすると，

$$h = \sqrt{36 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

四角錘 4 つ分の体積 V_2 は

$$V_2 = 3 \times 3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{14}}{2} \times \frac{1}{3} \times 4 = 36\sqrt{7} \simeq 95.24704719$$

$$V = V_1 + V_2 = 54 + 36\sqrt{7} \simeq 149.24704719$$

この時点で通常の四隅を正方形で切って組み立てた直方体の最大容積の 128 を軽く超えている．

問題 2 問題 1 のパターンの最大値を求めよ．

出来上がりの立体の高さを x とすると，その体積 V は

$$V = x(6-x)\left\{3(6-x) + 2\sqrt{-x^2+12x+36}\right\}$$

$$V' = \frac{3\left\{3(x-2)(x-6)\sqrt{-x^2+12x+36} + 2(x^3-14x^2+12x+72)\right\}}{-x^2+12x+36}$$

残念ながら，ここから極大になる条件を求めることは困難である．したがって，ニュートン法などを用いて近似解をもとめることとなる．幸い数式処理ソフトにはこの機能がほとんどついている．Excel のソルバーを用いても容易に計算できる．その結果．

$$MAX(V) = 151.7643055819202(x = 2.631545842757154)$$

という近似値を得る．