最大容積問題

問題 1 任意のへこみの無い形をした紙を使って，図 1 のように深さが x で側面が底面に対して垂直な容器を作った場合，その容積が最大となるときの底面積と側面積は等しいことを証明せよ．

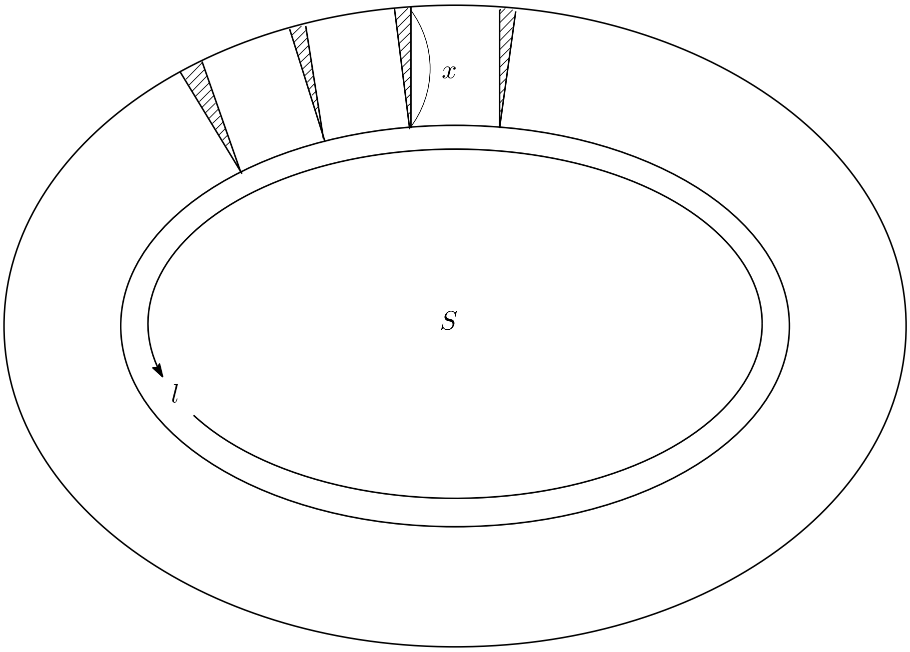

図 1

実際にへこみの無い曲線で囲まれた図形から，このような容器が作れるかどうか，論証しなくてはならないところであろうが，実際に作れると仮定して話を進めよう．

底面積を S，底面の周の長さを l，そのときの容器の深さを x とする．x を Δx だけ増加させたときの底面積を $S + \Delta S$ とすると，

$$\Delta S \simeq -l\Delta x \tag{1}$$

すこし大ざっぱ過ぎる感があるが，あまり深く追求しないで，次に進もう．
このときの体積 $V + \Delta V$ は

$$\begin{aligned}
V + \Delta V &= (S + \Delta S)(x + \Delta x) \\
&= Sx + S\Delta x + \Delta S x + \Delta S \Delta x \\
&= V + S\Delta x - l\Delta x x - l(\Delta x)^2 \\
V + \Delta V &= V + (S - lx)\Delta x - l(\Delta x)^2 \\
\Delta V &= (S - lx)\Delta x - l(\Delta x)^2 \\
\therefore \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} &= (S - lx) - l(\Delta x)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dx} = S - lx$$

よって，

$$\boxed{S = lx} \tag{2}$$

のときに容積が最大になることがわかる．さて，(1) がおおざっぱ過ぎると書いたが，もう少し正確に書くと

$$\Delta S \simeq -l\Delta x + \pi(\Delta x)^2 \tag{3}$$

である．これを用いると

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= \left\{S - l\Delta x + \pi(\Delta x)^2\right\}(x + \Delta x) \\ &= Sx - lx\Delta x + \pi x(\Delta x)^2 + S\Delta x - l(\Delta x)^2 + \pi(\Delta x)^3 \\ \Delta V &= -lx\Delta x + \pi x(\Delta x)^2 + S\Delta x - l(\Delta x)^2 + \pi(\Delta x)^3 \\ \therefore \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} &= S - lx + \pi x\Delta x - l\Delta x + \pi(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

となり結果は変わらない．

この最大容積に関する性質は美しいが，必ずしもこの結果を用いれば最大容積に関する問題が解きやすくなるというわけではない．底面の図形はもとの紙の形の平行曲線であるが，一般にむつかしい．たとえば図 1 は楕円を用いたが，楕円の平行曲線は楕円ではない．またその周を求めることも困難である．だから $S = lx$ という条件がすぐ使えるというわけではないのである．ただ，最大容積の問題の検算には使えるであろう．

さて，(3) は曲線が十分ゆるやかであるときは，等式として成り立つ，しかも微小な Δx でなくてもよい．つまり, 最初の紙の面積を S_0，周の長さを l_0 とすると，

$$S = S_0 - l_0 x + \pi x^2 \tag{4}$$

さらには次の等式も成り立つ

$$l = l_0 - 2\pi x \tag{5}$$

ここで十分ゆるやかというのは，どのくらいゆるやかかというと，曲率半径が x より長いということである．つまり最大容積を求めたい場合は最大を与える x よりも曲率半径が長いような曲線であれば (4),(5) は成り立つ．であるから，このようなゆるやかな周をもつ図形の最大容積とその条件を求めることはできる．

$$V = Sx \tag{6}$$

$$= S_0 x - l_0 x^2 + \pi x^3 \tag{7}$$

$$\frac{dV}{dx} = S_0 - 2l_0 x + 3\pi x^2 \tag{8}$$

つまり

$$S_0 - 2l_0 x + 3\pi x^2 = 0 \tag{9}$$

を解けば容積が最大となる条件を求めることができる．(4),(5),(9) を連立すれば (2) が成り立っていることが確認できる．逆に言えば，(2),(4),(5) を連立すれば (9) が求まるわけで，(6)〜(8) の計算は必要ない，つまり

微分はしなくてもよいとも言える（(2) を証明するのに微分を使っているのでいばって言うほどではないが）．
(9) を解くと，

$$x = \frac{l_0 \pm \sqrt{{l_0}^2 - 3\pi S_0}}{3\pi}$$

複合が $+$ の場合は明らかに不適当であるので，

$$x = \frac{l_0 - \sqrt{{l_0}^2 - 3\pi S_0}}{3\pi}$$

これが最大容積を与える条件である．紙の面積を正確に測るには，重さを量ることによりかなり正確に求めることができる．周の長さは糸を使えばいいであろう．平行曲線を描くにはどうしたらよいか．曲線に沿って円を転がせばよいのである．全て紙一枚というわけにはいかないが，現実的に可能である．