最大容積問題 (2)

正方形の四隅を正方形の形で切り取って，正四角柱のふたのない容器をつくるとき，その容積の最大値を求めよ，などという問題は微分の初歩の段階でよく目にする例題の一つである．しかし，このような正四角柱が必ずしも最大容積を与えるわけではないということは，ほぼ明らかである．切り取るのは正方形でなくてもよいし，曲線で切ってもいいわけである．あるいは全くはさみを使わずに「折る」という選択肢だってあるわけである．それぞれになかなか興味深い．

問題 1　図 1 のように 1 辺の長さが 12 の正方形の四隅を爪型に切り取って正四角錘台の容器を作るとき，その容積の最大値を求めよ．

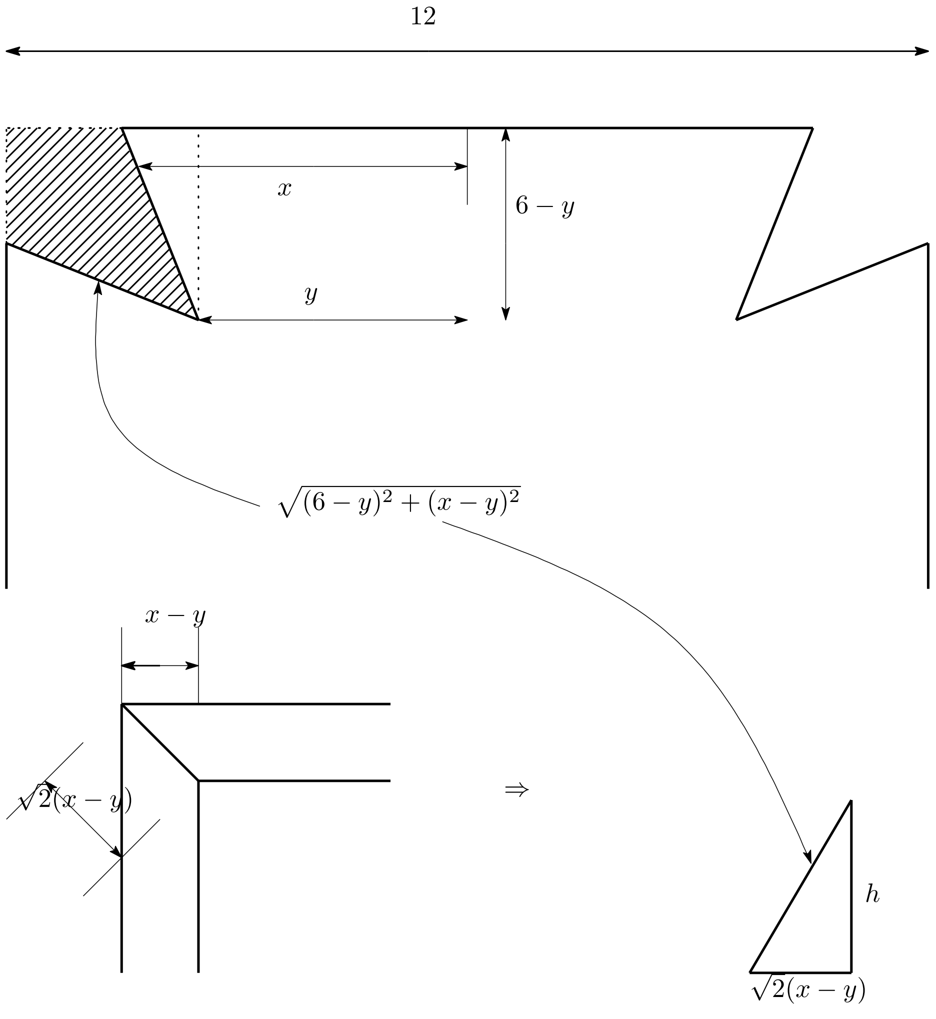

図 1

［解］あらかじめことわっておくと，この 12 という長さはこの問題に関しては大きすぎて計算の障害になる．

ほかの 1 連の最大容積の問題と比較するためにこの長さになっているだけで他意はない．だからもっと簡単な数字でスタートすべきかもしれないが，このまま進めることにする．まず図 1 のように x, y を与えたとき，正四角錘台の高さ h を求めよう．

$$
\begin{aligned}
h &= \sqrt{(6-y)^2 + (x-y)^2 - 2(x-y)^2} \\
&= \sqrt{(6-y)^2 - (x-y)^2} \\
&= \sqrt{(6+x-2y)(6-x)}
\end{aligned}
$$

ここで正四角錘台の体積を求めておこう．

定理 1 下底面の一辺の長さ x, 上底面の一辺の長さを y，高さを h とする正四角錘台の体積 V は

$$\frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)h$$

である．

［証明］切り取った部分の正四角錘の高さを h' とすると，

$$
\begin{aligned}
x : y &= (h + h') : h' \\
xh' &= yh + yh' \\
h' &= \frac{hy}{x-y} \\
V &= \frac{1}{3}x^2(h+h') - \frac{1}{3}y^2h' \\
&= \frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)h
\end{aligned}
$$

［証明おわり］

解答を続けよう．定理 1 より問題 1 の正四角錘台の容積は

$$V = \frac{4}{3}(x^2 + xy + y^2)\sqrt{(6+x-2y)(6-x)}$$

分数とルートが邪魔である．ついでに x について見やすくなるように．

$$z = -\left(\frac{3V}{4}\right)^2$$

つまり

$$z = (x^2 + xy + y^2)^2(x - 2y + 6)(x - 6)$$

とし，x で偏微分してみよう．

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2 + xy + y^2)\left\{(2x+y)(x-2y+6)(x-6) + (x^2 + xy + y^2)(x-y)\right\} \tag{1}$$

同様に y で偏微分すると

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + xy + y^2)(x-6)\left\{(x+2y)(x-2y) - (x^2 + xy + y^2)\right\} \tag{2}$$

(1),(2) とも中括弧の外は 0 になりえないか，またはなっても最大容積とは無関係なので，中括弧の中だけを問題にする．つまり

$$\begin{cases} (2x+y)(x-2y+6)(x-6)+(x^2+xy+y^2)(x-y)=0 & (3) \\ (x+2y)(x-2y)-(x^2+xy+y^2) & (4) \end{cases}$$

より，x または y を消去することを考える．(3) より，

$$\begin{aligned} 6x-4y^2+12y-xy-y^2&=0 \\ x(6-y)+y(12-5y)&=0 \\ x&=\frac{y(12-5y)}{y-6} \qquad (5) \end{aligned}$$

$(3)+(4)\times(x-y)$ より

$$(2x+y)(x-6)+(x+2y)(x-y)=0 \qquad (6)$$

このあたりまで計算すればもう充分で，あとは数式処理ソフトにでも任せてしまえばよいところであるが，もう少しがんばってみよう．(5) を (6) に代入して，

$$\left\{\frac{2y(12-5y)}{y-6}+y\right\}\left\{\frac{2y(12-5y)}{y-6}-6\right\}+\left\{\frac{2y(12-5y)}{y-6}+2y\right\}\left\{\frac{2y(12-5y)}{y-6}-y\right\}=0$$

両辺を y で割って，

$$\left\{\frac{2(12-5y)}{y-6}+1\right\}\left\{\frac{2y(12-5y)}{y-6}-6\right\}+\left\{\frac{2(12-5y)}{y-6}+2\right\}\left\{\frac{2y(12-5y)}{y-6}-y\right\}=0$$

両辺に $y-6$ をかけて，

$$(24-10y+y-6)\left\{12y-5y^2-6(y-6)\right\}+\{12-5y+2(y-6)\}\{y(12-5y)-y(y-6)\}=0$$

$$7y^3-22y^2-24y+72=0 \qquad (7)$$

カルダノの方法で解いてみよう．二次の項を消すために，

$$\begin{aligned} y&=\frac{t+22}{21} \\ 21y&=t+22 \qquad (8) \end{aligned}$$

とする．(7) を 7 で割って

$$y^3-\frac{22}{7}y^2-\frac{24}{7}+\frac{72}{7}=0$$

さらに 21^3 倍して整理すると，

$$(21y)^3-66(21y)^2-(72\times 21)(21y)+3\times 21^2\times 72=0$$

(8) を代入すると

$$(t+22)^3-66(t+22)^2-(72\times 21)(t+22)+3\times 21^2\times 72=0$$

整理して

$$t^3-3\times 988t+40696=0$$

$$t=\alpha+\beta$$

とすると，

$$\begin{cases} \alpha^3+\beta^3=-40696 & (9) \\ \alpha^3\beta^3=988^3 & (10) \end{cases}$$

を満たす α,β を求めればよい．α^3,β^3 は 2 次方程式

$$u^2+40696u+988^3=0$$

の 2 つの解である．これを解くと，

$$\begin{aligned} u &= -20348\pm\sqrt{20348^2-988^6} \\ &= -20348\pm 2^2\times 3^4\times 7\sqrt{107}i \\ \therefore\quad t &= \sqrt[3]{-20348+2^2\times 3^4\times 7\sqrt{107}i}+\sqrt[3]{-20348-2^2\times 3^4\times 7\sqrt{107}i} \end{aligned}$$

とあと，2 つある．つまりそれぞれに ω,ω^2 をかけたものである．ここまできてしまったので，もう数式処理ソフトの世話にならず，電卓だけで切り抜けよう．

$$\begin{aligned} |\alpha|=|\beta| &= \sqrt[6]{20348^2+\left(2^2\times 3^4\times 7\sqrt{107}\right)^2} \\ &= \sqrt[6]{5087\times 2^2+2^4\times 3^8\times 7^2\times 107} \end{aligned}$$

$\theta=\arg\alpha$ とすると，

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= |\alpha|\times 2\cos\theta \\ &= |\alpha|\times 2\cos\left(\frac{\tan^{-1}\dfrac{2^2\times 3^4\times 7\sqrt{107}}{2^2\times 5087}}{3}\right) \\ &= 2|\alpha|\cos\left(\frac{\tan^{-1}\dfrac{3^4\times 7\sqrt{107}}{5087}+\pi}{3}\right) \\ &= 2|\alpha|\times 0.72362504 \\ &= 62.86493457\times 0.72362504 \\ t &= 45.49064079 \\ y &= 3.213840038 \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} x &= 4.693829021 \\ h &= 2.360576189 \\ V &= 149.3332422 \quad \cdots Ans. \end{aligned}$$

さてもう少し踏み込んで図 2 のような展開図で，正四角柱に正四角錘台が乗ったような形について調べてみよう．今度は変数がさらに一つ増える．問題 1 において正方形の一辺を 12 としたが，ここを $2z$ に置き換えれば正四角錘台の部分の容積は求まる．

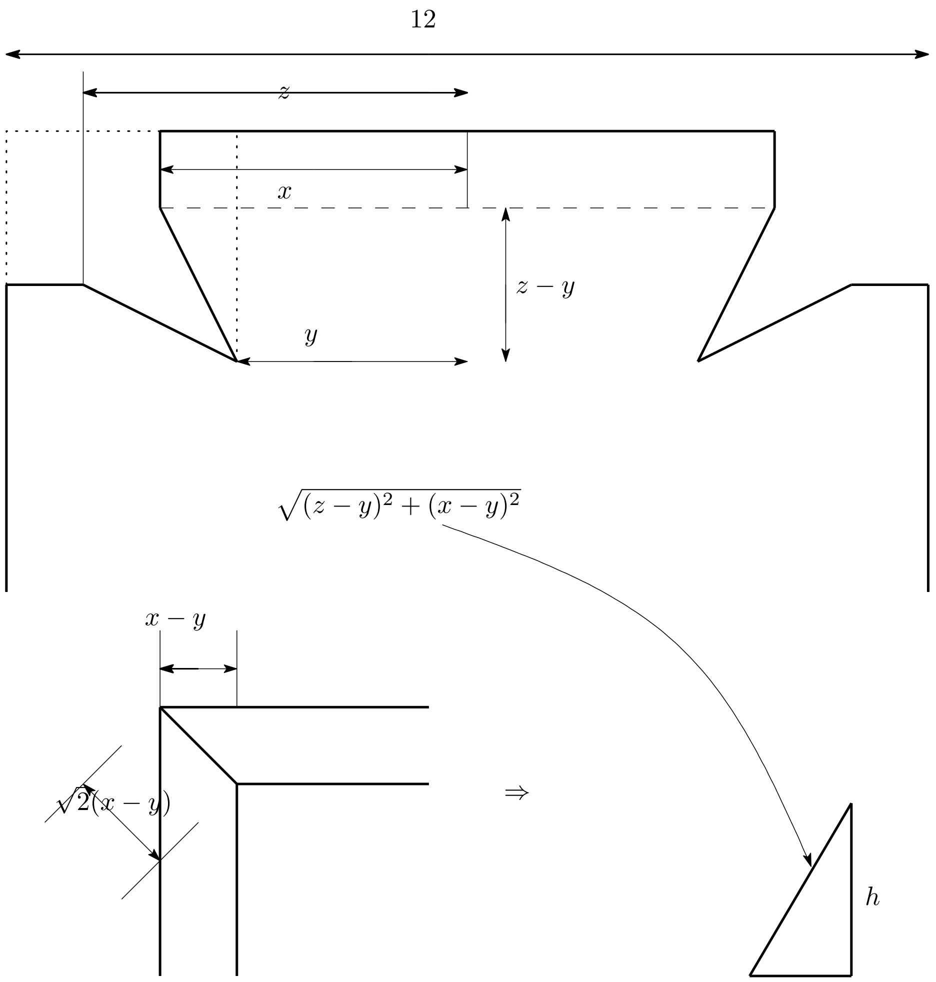

図 2

正四角錘台の部分の高さ h は

$$
\begin{aligned}
h &= \sqrt{(z-y)^2+(x-y)^2-2(x-y)^2} \\
&= \sqrt{(z-y)^2-(x-y)^2} \\
&= \sqrt{(z+x-2y)(z-x)}
\end{aligned}
$$

正四角錘台の部分の容積 V_1 は

$$V_1 = \frac{4}{3}(x^2+xy+y^2)\sqrt{(z+x-2y)(z-x)}$$

正四角柱の部分の容積 V_2 は

$$V_2 = 4x^2(12-z)$$

よって求める容積 V は

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}(x^2+xy+y^2)\sqrt{(z+x-2y)(z-x)} + 4x^2(6-z)$$

これはもうこれ以上簡単にすることはできないし，微分してもおそらく何も生まれてこないだろうと思われるので，このまま数値計算に突入する．Excel のソルバーは複数の変数に対応している．初期値によっては収束しないので，問題 1 の解を初期値に与えると良い．

$$
\begin{aligned}
x &= 4.43097702410139 \\
y &= 2.73848520577441 \\
z &= 5.00919438407290 \\
V &= 157.068736553035
\end{aligned}
$$

さて，Excel のソルバーはどのくらいの実力があるのであろうか．ヘルプを読むと変数の個数は 200 までと書いてある．それでは一気に変数の個数を増やしてソルバーに解かしてみよう．別ファイルの Excel ブックの説明をしよう．

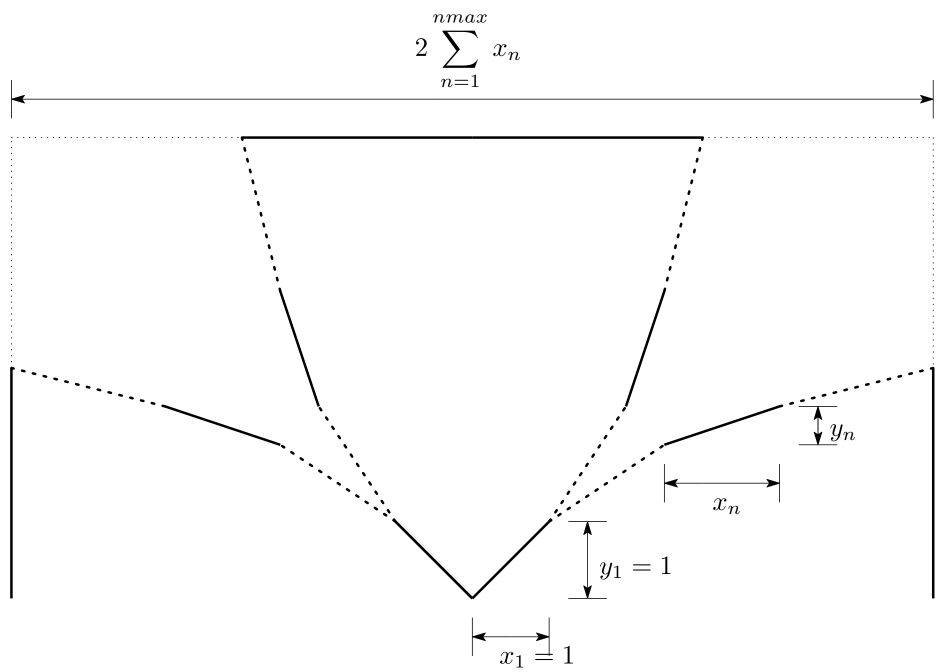

図 3

図 3 のように (x_1, y_1)〜(x_{nmax}, y_{nmax}) の変数を考える．ただし，$(x_1, y, 1)$ は $(1, 1)$ に固定する．この変数も変化させせることができるが，固定したほうがうまくいくようである．当然のことながら

$$x_n \geq y_n$$

である．条件を全く与えないと，各変数が負になったり，x_n, y_n の大小関係が逆になったりするので配慮が必要である．x_n, y_n が関与する正四角錘台の高さ h_n は

$$h_n = \sqrt{x^2 - y^2}$$

である．またその正四角錘台の体積 V_n は前述のとおり

$$\frac{V_n}{4} = \frac{1}{3}(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2)h$$

である．最後に体積の合計に

$$\frac{6^3}{\left(\sum_{n=1}^{nmax} x_n\right)^3}$$

をかけてやれば 12cm 四方の正方形で作った場合の体積（容積）が出る．この体積の最大をソルバーで解くわけである．$nmax = 2$ の場合が問題 1 に相当する．次に，変数の数を 100 個で解いてみた．真の解との誤差は約 0.01% であった．