最大容積問題 (4)

—円弧や楕円，サイクロイドを用いた場合—

正方形の 4 すみをサインカーブで切り取り，出来上がりの断面が長方形に円の一部分をくっつけたような形になる場合について調べてみよう．なお，計算が膨大になるため途中式はところどころ省略してある．

問題 1　図 1 のような展開図の紙を組み立てると，図 2 のような器ができる．容積 V を r で表せ．

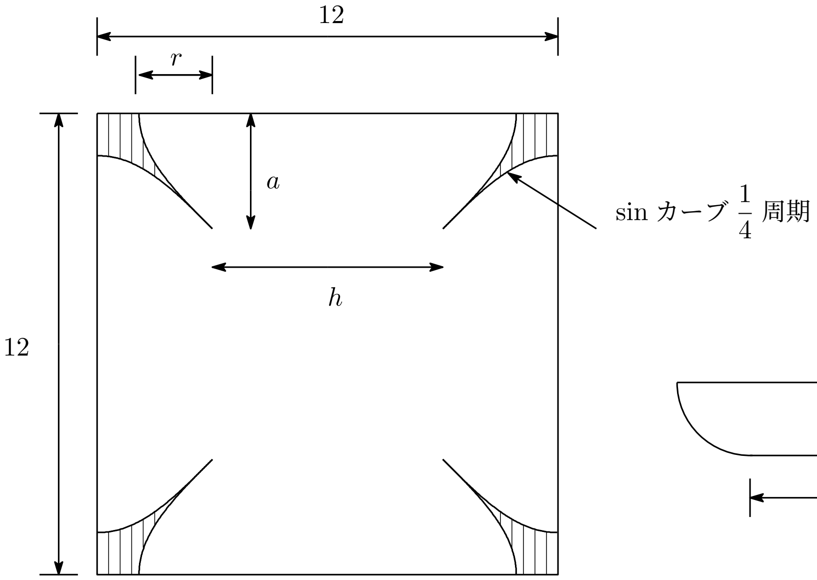

図 1

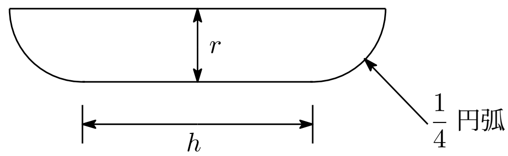

図 2

［解］

$$a = \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi}{2} r$$

$$h = 13 - 2a = 12 - \pi r$$

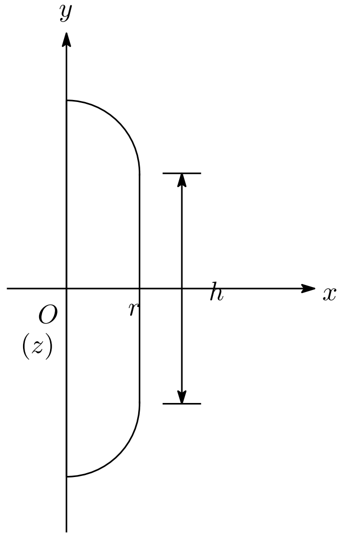

図 3

図 3 のように xyz 空間に容器を置く．手前方向が z 軸とする．立体を x 軸に垂直な平面で切ったとき，その断面（正方形）の一辺の長さ l は,

$$\begin{aligned} l &= 2\sqrt{r^2 - x^2} + h \\ &= 2\sqrt{r^2 - x^2} + 12 - \pi r \end{aligned} \tag{1}$$

同じく断面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= (2\sqrt{r^2 - x^2} + 12 - \pi r)^2 \\ &= 4(r^w - x^2) + 4\sqrt{r^2 - x^2}(12 - \pi r) + (12 - \pi r)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore V &= \int_0^r S dx \\
&= \int_0^r 4(r^w - x^2) + 4\sqrt{r^2 - x^2}(12 - \pi r) + (12 - \pi r)^2 dx \\
&= \frac{1}{3} r\{8r^2 + 3(12 - \pi r)^2 + 2\pi(12 - \pi r)r\} \\
&= \frac{4}{3} r(2r^2 - 9\pi r + 108) \qquad (2) \\
&= \frac{4}{3}(2r^3 - 9\pi r^2 + 108r) \cdots Ans. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

問題 2 問題 1 において $a = 6$ つまり $\frac{\pi}{2} r = 6$ のとき V を求めよ.

［解］$h = 0$ の場合であるから，問題 1 の解の (1) に戻って計算してもよいが，(3) に代入してみよう.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\left(2 \times \frac{12^3}{\pi^3} - 9\pi \times \frac{144}{\pi^2} + 108 \times \frac{12}{\pi}\right) \\
&= \frac{2^9 \times 3^2}{\pi^3} \simeq 148.6 \cdots Ans.
\end{aligned}
$$

この立体は横から見たとき完全な半円となるので一見容積最大となるような気がするが，実は最大ではない（写真 1）[*1]．それではこのパターンで最大となるのはどのような場合であろうか．それを次問で解いてみよう．

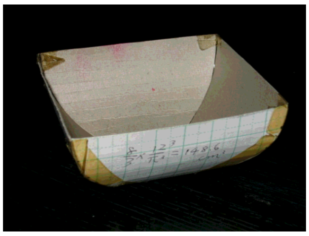

写真 1

問題 3 問題 1 において V が最大になる場合とその最大値を求めよ.

［解］

$$V' = 8(r^2 - 3\pi r + 18)$$

$V' = 0$ を解き，

$$r^2 - 3\pi r + 18 = 0 \qquad (4)$$

$$r = \frac{3\left(\pi - \sqrt{\pi^2 - 8}\right)}{2} \simeq 2.66138611 \qquad (5)$$

のとき V は極大（最大）となる．a の値でいうと，

$$a = \frac{\pi}{2} r = 4.180496627$$

である．最大値を求めるには，(5) を (2) あるいは (3) に代入すればよいことであるが，とても大変である．そこで (3) を (4) で割って，次数を下げておこう．

$$2r^3 - 9\pi r^2 + 108r = (r^2 - 3\pi r + 18)(2r - 3\pi) + \{(72 - 9\pi^2)r + 54\pi\}$$

よって最大となる条件をみたす r において

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\{(72 - 9\pi^2)r + 54\pi\} \\
&= 12\left\{(8 - \pi^2)\frac{3\left(\pi - \sqrt{\pi^2 - 8}\right)}{2} + 6\pi\right\} \\
&= 18\left\{12\pi - \pi^3 + (\pi^2 - 8)^{\frac{3}{2}}\right\} \simeq 166.4857848 \cdots Ans.
\end{aligned}
$$

[*1] この図形は円柱同士の**相貫体**の半分である.

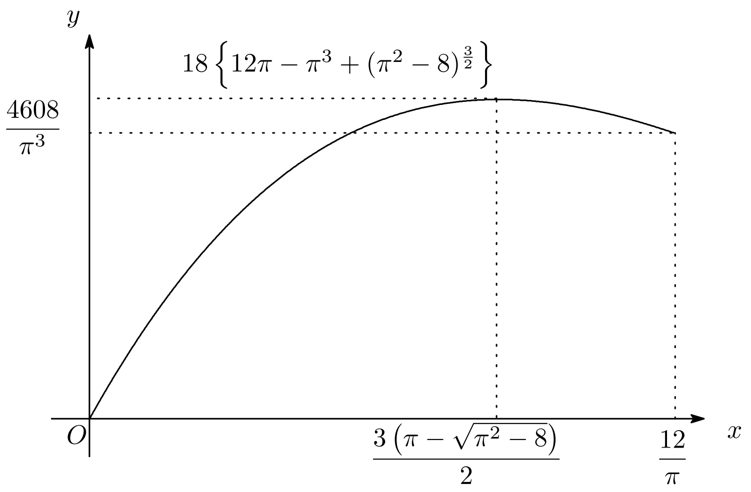

図 4

幸い 3 次関数であったため，最後まで数値計算に頼らず正確に求めることができた．断面図を横から見た形を図 5 に示す．意外に深い皿となる．

図 5

これが横から見た図が長方形と $\frac{1}{4}$ 円弧になる場合の最大値には違いないのであるが，はたしてこの $\frac{1}{4}$ 円弧が最適であるのかということはまだわからない．少し拡張してみよう．

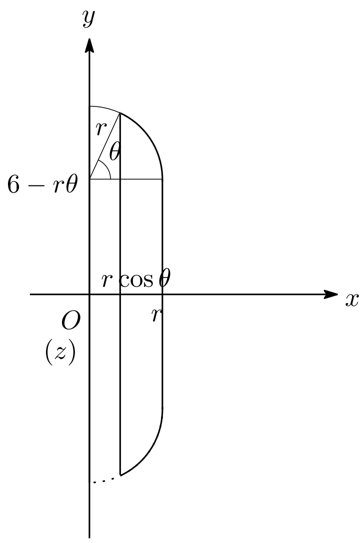

図 6

図 6 のように $\frac{1}{4}$ 円弧のさらに一部分を用いた形になる場合について計算してみよう．

$$\frac{V}{4}=\int_{r\cos\theta}^{r} y^2dx \qquad =\int_{r\cos\theta}^{r}\{\sqrt{r^2-x^2}+6-r\theta\}^2dx$$

$$=r\left\{\frac{r^2}{3}(\cos\theta-1)^2(\cos\theta+2)\right\}$$
$$+r\{(6-r\theta)^2(1-\cos\theta)+r(6-r\theta)(\theta-\sin\theta\cos\theta)\}$$

と，なんとも長ったらしい式になってしまった．これから先簡単にできるのかできないのかもよくわからない．微分してもおそらく何の足しにもならないだろうと思われる．数値計算に頼ってみると，

$$r\simeq 2.97,\theta\simeq 84.5^\circ$$

において V は最大になることがわかる．その最大値は

$$V=166.87$$

であり，問題 3 の解と比べると，ほんのわずかではあるがこちらのほうが大きいことがわかる．さらに，次に述べる楕円の二分の一を断面図とする場合と比べても，問題 3 の場合やこの拡張した場合のほうが大きいのである．この結果については意外であった．さらに後ほど述べることになると思う理想曲線は，楕円よりむしろこちらの図形に近くなることが予想できる．

問題 4 正方形の四隅を切り取って，組み立てたら図 7 のような図形の容器ができた．z 軸方向から見ると（y 軸方向から見ても同じ形）楕円の半分，x 軸方向から見ると正方形である．容積 V を求めよ．

［解］

$$\frac{V}{4}=\int_0^a y^2dx$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{V}{4}&=\int_0^a\left(b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\right)dx\\&=ab^2-\frac{ab^2}{3}\\&=\frac{2ab^2}{3}\\\therefore V&=\frac{8ab^2}{3}\cdots Ans.\end{aligned}$$

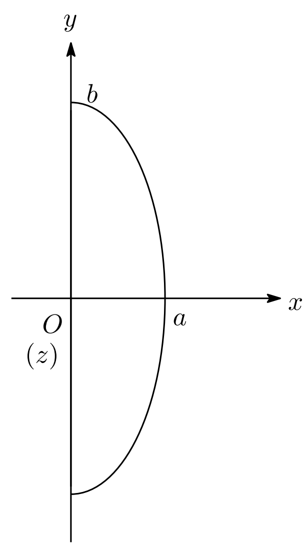

図 7

定理 1 楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a<b)$$

の周の長さ L の $\dfrac{1}{4}$ は次の式で与えられる．

$$\frac{L}{4}=b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta\quad\left(k^2=\frac{b^2-a^2}{b^2}\right)$$

［証明］$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ とすると，

$$\begin{aligned}\frac{L}{4}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2(1-\sin^2\theta)}d\theta\\&=b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^2}\sin^2\theta}d\theta\\&=b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta\end{aligned}$$

［証明おわり］

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta$ は**第二種完全楕円積分**と呼び，$E(k)$ で表す．k は離心率である．$E(k)$ は初等関数で表すことができない．

問題 5 問題 4 において，一辺の長さが 12 の正方形を使って立体を作った．断面の楕円の離心率が k として，立体の容積 V を k で表せ．

［解］

$$6 = bE(k)$$

より

$$b = \frac{6}{E(k)}$$

$$a^2 = b^2(1 - k^2)$$

より

$$a = \frac{6}{E(k)}\sqrt{1 - k^2}$$

問題 4 の答より

$$V = \frac{8}{3} \times \frac{6}{E(k)}\sqrt{1 - k^2}\left(\frac{6}{E(k)}\right)^2 = \frac{576\sqrt{1 - k^2}}{\{E(k)\}^3} \cdots Ans.$$

さてこの結果を用いて数値計算をしてみよう．Excel には最大値を求めるためのソルバーという機能がついている．肝心の楕円積分を計算する関数は装備されていないが，幸い「エクセル数値計算ライブラリ」というフリーのライブラリが (有) ピーシーフレンドというところから出ている．これをインストールすることにより，通常の関数と同じように使うことができ，大変便利である．ソルバーにおいて k 初期値の違いによって，多少結果に差が出るのはおそらくソルバーの限界なのだと思う．$k = 0.8$ を初期値として計算した結果もっともいい値が出た．

$$\begin{aligned}
k &= 0.776084154844805 \\
a &= 2.91693537327296 \\
b &= 4.62543544112601 \\
E(k) &= 1.29717516899108 \\
V &= 166.418187181362
\end{aligned}$$

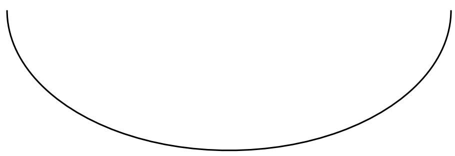

図 8

さて実際にこの図形を作るとしたら展開図はどうなるであろうか．それは楕円柱を斜め 45 度の角度で切ったときの展開図と同じである．結論からいえば，これも楕円積分を用いないと表せない．この場合は完全楕円積分ではなく不完全楕円積分を用いる．つまり，全弧長ではなく，一部分の弧長が必要となる．問題 3 などの場合のほうが実際には良い成績を上げたわけで，この楕円の場合は作る意味があまり無いと思われるのでこの辺にしておこうと思う．

さてこの種の問題で，これ以上色々な曲線について個別に調べることは，博物的趣味以外の何ものでもないが，問題 5 に近い形でなおかつ周長が簡便なサイクロイドで解いてみよう．

問題 6 サイクロイド

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

の全弧長 l を求めよ.

［解］

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta} d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= 4(-\cos\pi + \cos 0) \\ &= 8 \cdots Ans. \end{aligned}$$

問題 7 問題 1 のサイクロイドにおいて区間 $[0, x]$ の弧長を l とするとき，x を l の関数で表せ.

［解］

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{2}\int_0^{\theta} \sqrt{1-\cos\theta} d\theta \\ &= 2\int_0^{\theta} \sin\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\theta} \\ &= 4\left(-\cos\frac{\theta}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= 2\left(1 - \cos^2\theta 2\right) \\ &= 2\left\{1 - \left(\frac{l}{4} - 1\right)^2\right\} \\ &= \frac{l}{8}(8 - l) \end{aligned}$$

となり，y は l の簡単な関数で表せるが，x は簡単な関数で表すことができないので

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ l = 4\left(-\cos\frac{\theta}{2} + 1\right) \end{cases}$$

とパラメータ表示にとどめておくことにする．この問題は「ついで」の問題であり，後の問題を解くために必要なわけではない．

問題 8 一辺の長さが 12 の正方形から，これまでの問題と同様に容器を作り，断面がサイクロイドになるようにする．この立体の容積 V を求めよ．

［解］弧長が 12 であるから，

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y = \dfrac{3}{2}(1 - \cos\theta) \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

また体積を求めるには x 軸方向に π だけ平行移動したほうが考えやすいので，

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}(\theta + \sin\theta) \\ y = \dfrac{3}{2}(1 + \cos\theta) \qquad (0 \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

とする．

$$V = 4\int_0^3 x^2 dy$$

$y \to \theta$ と変数変換すると，$0 \to \pi, 3 \to 0, \dfrac{dy}{d\theta} = -\dfrac{3}{2}\sin\theta$

$$\begin{aligned} \therefore V &= \frac{27}{2}\int_0^\pi (\theta^2 + 2\theta\sin\theta + \sin^2\theta)\sin\theta d\theta \\ &= \frac{27}{2}\int_0^\pi (\theta^2\sin\theta + 2\theta\sin^2\theta + \sin^3\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \theta^2 \sin\theta d\theta = \pi^2 - 4$$

$$\int_0^\pi 2\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= \frac{27}{2}\left(\pi^2 - 4 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{27}{2}\left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{81\pi^2}{4} - 36 \cdots Ans. \\ &\simeq 163.85948912205951203139844274749 \end{aligned}$$

と，割合良い値を得るが，問題 3〜5 と比べると劣る．