最大容積問題 (5)

正方形の四隅を切り取って，口の開いた容器を作り，この容積の最大を求めるという問題を解いてきた．開口部が正方形になるパターンについてはほぼ調べつくした感があるので，いよいよ本題に入ろうと思う．

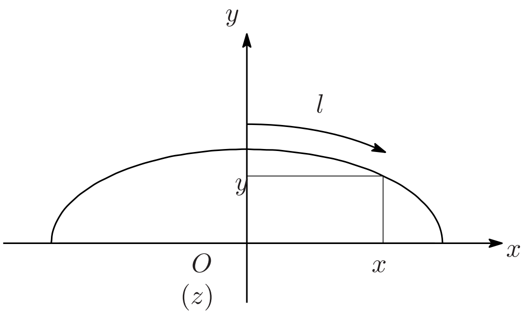

図 1

都合上，これまでと違って，できあがりの容器を伏せて図 1 のように置く．x における y 軸から測った弧長を l とする．

問題 1 l を x の関数で表すと，

$$l = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

である．この逆関数を

$$x = g(l)$$

で表すとき，y を l の関数で表せ.

［解］

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{dx} &= \sqrt{1 + (y')^2} \\
\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 &= 1 + (y')^2 \\
(y')^2 &= \left(\frac{dl}{dx}\right)^2 - 1 \\
y' &= \sqrt{\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 - 1} \\
y &= \int_0^x \sqrt{\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 - 1} dx \\
&= \int_0^l \sqrt{\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 - 1} \frac{dx}{dl} dl
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= \int_0^l \sqrt{1-\left(\frac{dx}{dl}\right)^2}\,dl \\
y &= \int_0^l \sqrt{1-(g'(l))^2}\,dl \cdots Ans.
\end{aligned}
$$

問題 2 この容器の体積 V を l の関数で表せ．

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^y x^2 dy \\
&= \int_0^l x^2 \frac{dy}{dl} dl \\
&= \int_0^l x^2 \sqrt{1-(g'(l))^2}\,dl \\
&= \int_0^l x^2 \sqrt{1-\left(\frac{dx}{dl}\right)^2}\,dl \cdots Ans.
\end{aligned}
$$

ここで変文法を導入する．

定理 1 汎関数

$$
v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx
$$

の極値曲線を与えることのできる，オイラーの方程式は，

$$
\boxed{F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0}
$$

である．

［証明略］長くなるので，「変分法（オイラーの方程式）」に関する頁を参照すべし．

定理 2 （連鎖法則） t の関数 $x = x(t), y = y(t)$ が微分可能で，$(x(t), y(t))$ は領域 D 内にあるとする．D で定義された微分可能な関数 $f(x, y)$ に対して，$z = f(x(t), y(t))$ は t に関して微分可能であって

$$
\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}
$$

が成り立つ．

［証明略］

定理 3 関数 F が y と y' だけを含む場合，オイラーの方程式は

$$
\boxed{F - F_{y'}y' = C_1}
$$

である．

［証明］$F_{xy'} = 0$ であるから，オイラーの方程式は，

$$
F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0
$$

ここで，合成関数の微分公式（連鎖法則）より，

$$
\begin{aligned}
\frac{dF}{dx} &= F_y y' + F_{y'} y'' \\
\frac{d}{dx} F_{y'} &= F_{y'y} y' + F_{y'y'} y'' \\
\therefore \frac{d}{dx}(F - F_{y'} y') &= F_y y' + F_{y'} y'' - (F_{yy'} y' + F_{y'y'} y'') y' - F_{y'} y'' \\
&= F_y y' - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' y' \\
&= (F_y - F_{yy'} - F_{y'y'} y'') y' \\
&= 0 \\
\therefore F - F_{y'} y' &= C_1
\end{aligned}
$$

［証明おわり］

ここで，$y' \neq 0$ という条件を用いていることには注意を払わなければならない．

問題 3

$$F = y^2 \sqrt{1 - y'^2}$$

としたときのオイラーの方程式を求めよ．

［解］$F - F_{y'} y' = C_1$ より

$$
\begin{aligned}
F - y' \times y^2 \times \frac{-2y'}{2\sqrt{1 - y'^2}} &= C_1 \\
y^2 \sqrt{1 - y'^2} + \frac{y^2 y'^2}{\sqrt{1 - y'^2}} &= C_1 \\
y^2 \times \frac{1 - y'^2 + y'^2}{\sqrt{1 - y'^2}} &= C_1 \\
\therefore y^2 = C_1 \sqrt{1 - y'^2} \cdots Ans.
\end{aligned}
$$

これが，到達目標の最大容積を与える関数の微分方程式である．もちろん変数は読み替えなければならない．積分定数 C_1 を決めるには，1 辺の長さ 12 の正方形の紙を用いた場合

$$y'(6) = 0$$

であるので

$$C_1 = \{y(6)\}^2$$

を用いる．なぜならば，紙の端の部分，つまり最後の Δy において体積を最大にするのは $y'(6) = 0$ に違いないからである．ただしこれはきちんとした論証が必要である．

問題 4 $y^2 = C_1 \sqrt{1 - y'^2}$ を解け．ただし，$y(0) = 0, y'(6) = 0$ とする．

［解］

$$
\begin{aligned}
1 - y'^2 &= \frac{y^4}{{C_1}^2} \\
y'^2 &= 1 - \frac{y^4}{{C_1}^2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= \sqrt{1-\frac{y^4}{{C_1}^2}} \\
\frac{y'}{\sqrt{1-\frac{y^4}{{C_1}^2}}} &= 1 \\
\int \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{y^4}{{C_1}^2}}} &= x \\
\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{y^4}{{C_1}^2}}} &= x + C_2
\end{aligned}
$$

これは楕円積分である．$y(0)=0$ より $C_2=0$. また $y(6)^2=C_1$ より

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{C_1}} \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{y^4}{{C_1}^2}}} &= 6 \\
\int_0^{\sqrt{C_1}} \frac{C_1}{\sqrt{{C_1}^2-y^4}}dy &= 6
\end{aligned}
$$

$\sqrt{C_1}=C$ とすると，

$$
\int_0^C \frac{C^2}{\sqrt{C^4-y^4}}dy = 6
$$

$y=Ct$ とおくと，$\dfrac{dy}{dt}=C$ より

$$
\begin{aligned}
C\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}dy &= 6 \\
C &= \frac{6}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}dy} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

もちろんこれも楕円積分である．($C \simeq 4.5765585811716657245295794354231$)

ここで確認しておかなくてはならないが，ここで x は問題 1，2 における l，つまり道のり方向に相当する．y は問題 1，2 において x つまり座標軸方向である．展開図で言えば，x は辺方向の長さを表し，y は切り取る曲線上の y 座標を表す．つまりこの方程式は展開図上の切り取る部分の曲線の方程式である．

問題 5 問題 4 の条件を満たすとき，$V = 4\displaystyle\int_0^6 y^2\sqrt{1-y'^2}dx$ をもとめよ．

［解］

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{4} &= \int_0^C y^2\sqrt{1-y'^2}\frac{dx}{dy}dx \\
&= \int_0^C y^2\sqrt{\frac{1}{y'^2}-1}dy
\end{aligned}
$$

問題 4(1) より，

$$\frac{V}{4}=\int_0^C y^2\sqrt{\frac{1}{1-\dfrac{y^4}{{C_1}^2}}-1dy}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^C y^2\sqrt{\frac{{C_1}^2}{{C_1}^2-y^4}-1dy}\\
&=\int_0^C \frac{y^4}{\sqrt{{C_1}^2-y^4}}dy
\end{aligned}
$$

$C_1=C^2$ より

$$\frac{V}{4}=\int_0^C \frac{y^4}{\sqrt{C^4-y^4}}dy$$

$y=Ct$ とすると，$\frac{dy}{dt}=C$ より

$$
\begin{aligned}
V&=4\int_0^1 \frac{C^4t^4}{C^2\sqrt{1-t^4}}Cdt\\
&=4C^3\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{1-t^4}}dt
\end{aligned}
$$

問題 4(2) より

$$V=\frac{4\times 6^3\displaystyle\int_0^1\frac{t^4}{\sqrt{1-t^4}}dt}{\left(\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\right)^3}\cdots Ans.$$

問題 6 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$ を楕円積分の標準型で表せ.

［解］$x^2=\cos\theta$ とすると，上端 $1\to 0$，下端 $0\to\dfrac{\pi}{2}$ と代わり，$2x\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\times\frac{1}{2x}\times\cos\theta d\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\theta}d\theta
\end{aligned}
$$

$\theta=2\phi$ より

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\phi}\times 2d\phi\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\phi}d\phi\\
&=E\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)\cdots Ans.
\end{aligned}
$$

これは第二種不完全楕円積分であるが，直近の問題には用いない．後ほど必要となる．

問題 7 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ を楕円積分の標準型で表せ.

［解］$x^2 = \cos\theta$ とすると，上端 $1 \to 0$，下端 $0 \to \dfrac{\pi}{2}$ と代わり，$2x\dfrac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$ であるから，

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \times \frac{1}{2x} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}
\end{aligned}$$

$\theta = 2\phi$ より

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-2\sin^2\phi}} \times 2d\phi \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-2\sin^2\phi}} \\
&= F\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) \cdots Ans.
\end{aligned}$$

問題 8 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$ を楕円積分の標準型で表せ.

［解］$x^2 = \cos\theta$ とすると，上端 $1 \to 0$，下端 $0 \to \dfrac{\pi}{2}$ と代わり，$2x\dfrac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$ であるから，

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \times \frac{1}{2x} \times \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}}\theta d\theta
\end{aligned}$$

$I(n) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$ とすると，

$$I(n+2) = \frac{n+1}{n+2}I(n) \quad (n > -1)$$

これに $n = -\dfrac{1}{2}$ を代入して

$$I\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}I\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = 2F\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ より

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2F\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}F\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) \cdots Ans.
\end{aligned}$$

問題 9 問題 5 の V を楕円積分の標準型で表し近似値を求めよ.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4\times 6^3 \displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{1-t^4}}dt}{\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\right)^3} \\
&= \frac{4\times 6^3 \times \dfrac{1}{3}F\left(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)}{\left\{F\left(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)\right\}^3} \\
&= \frac{288}{\left\{F\left(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)\right\}^2} \\
&\simeq 167.559107575168080402786616223 93
\end{aligned}
$$

長い道のりであったが，なんとかここまでたどり着くことができた．

さて，この場合，断面図はどのような図形であろうか．最大容積問題 (4) においてすでに数値解は出てるといってもよい．しかし，今回算出した結果をもとに考えてみよう．

ここで再度確認しておかなくてはならないが，問題 4 で解いた微分方程式で x は何を表しているかというと断面の道のり，つまり展開図における中心からの距離を表している．問題 1 において l が相当する．それに対して y は図 1 で言えば x に相当する．途中で変数が代わってしまったので注意が必要である．これから用いる座標は図 2 のように定める．x, y はそのままで，新たに容器の深さ方向を z とする．

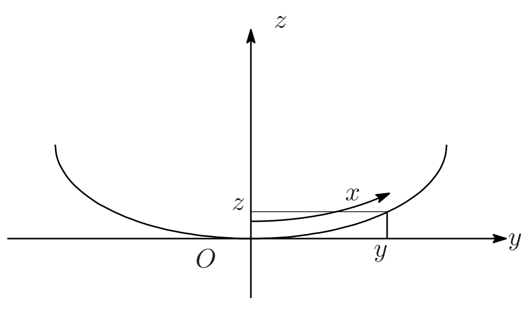

図 2

(1) より

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1-\frac{y^4}{{C_1}^2} \\
\frac{(dy)^2}{(dy)^2+(dz)^2} &= \frac{{C_1}^2-y^4}{{C_1}^2} \\
\frac{(dy)^2+(dz)^2}{(dy)^2} &= \frac{{C_1}^2}{{C_1}^2-y^4} \\
\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 &= \frac{{C_1}^2}{{C_1}^2-y^4}-1 \\
\frac{dz}{dy} &= \sqrt{\frac{y^4}{{C_1}^2-y^4}}
\end{aligned}
$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y^2}{\sqrt{{C_1}^2 - y^4}}$$
$$z = \int_0^y \frac{y^2}{\sqrt{{C_1}^2 - y^4}} dy$$

これは問題 2 で示したように，第二種不完全楕円積分である．つまり，最大容積を与える立体は，展開図および体積で第一種不完全積分を用い，断面図の曲線は第二種不完全楕円積分で表されることがわかった．

問題 6 において第二種完全楕円積分への変換を行ったが，これは第二種不完全楕円積分なので再度取り上げよう．

問題 10

$$z = \int_0^y \frac{y^2}{\sqrt{C^4 - y^4}} dy$$

を満たす (y, z) を第二種不完全楕円積分の標準形を用いてパラメータ表示せよ．

［解］$y^2 = C^2 \cos\theta$ とすると，上端 $y \to \phi$，下端 $0 \to \dfrac{\pi}{2}$ と代わる．ただし，

$$y = C\sqrt{\cos\phi}$$

である．，$2y\dfrac{dy}{d\theta} = -C^2 \sin\theta$ であるから，

$$\begin{aligned} z &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\phi} \frac{-C^2 \sin\theta}{\sqrt{C^4 - C^4 \cos^2\theta}} \times \frac{1}{2C\sqrt{\cos\theta}} \times C^2 \cos\theta d\theta \\ &= \frac{C}{2} \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta} d\theta \end{aligned}$$

$\theta = 2t$ とすると，上端 $\dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{\pi}{4}$，下端 $\phi \to u$ と代わる．ただし，

$$\phi = 2u$$

なので，y とパラメータとの関係も変わり，

$$y = C\sqrt{\cos 2u}$$

である．

$$\begin{aligned} z &= \frac{C}{2} \int_u^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - 2\sin^2 t} \times 2dt \\ &= C \int_u^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - 2\sin^2 t} dt \\ &= C \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - 2\sin^2 t} dt - \int_0^u \sqrt{1 - 2\sin^2 t} dt \right) \\ &= C \left\{ E\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) - E\left(u, \sqrt{2}\right) \right\} \\ \therefore (y, z) &= \left(C\sqrt{\cos 2u}, C\left\{ E\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) - E\left(u, \sqrt{2}\right) \right\} \right) \cdots Ans. \end{aligned}$$

$$\left(\text{ただし } C=\frac{6}{F\left(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)}\right)$$

これを元に断面図のグラフを別ファイル (Excel) で示した．面白いことに「最大容積問題 (4)」で求めた楕円の長軸の長さと，今回の図形の幅が全く一致している．つまり

$$E(k)=F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{2}\right)$$

となっている．これは偶然ではないと思われる．しかし，どうしてこうなるのかはよくわからない．

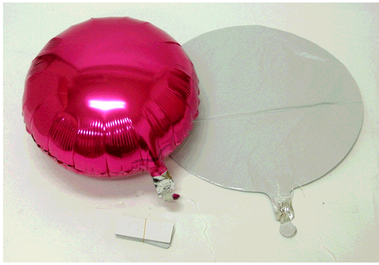

写真 1

さて，写真 1 に示したような風船に空気を入れた場合，断面はどうなるであろうか．実際は素材が伸びるために計算どおりにはいかないが，理想状態を考えてみよう．その一つは伸び縮みは全くしないが，曲げることとは無限に可能である素材である．この場合，円周付近ではしわが限りなくつくが，問題 10 で示した曲線にかぎりなく近づく．しかし，このしわが限りなく可能として本当にそのような図形が可能かどうかは論証が必要であろう．もうひとつは伸びることは不可能だが縮むことだけ可能な素材を考えればこれは可能である．この場合も断面は問題 10 の答の図形と相似形となる．つまり楕円には近いが，楕円ではなく，楕円積分で表される関数であることがいえたわけである．

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）

[2] 熊原啓作『多変数の微積分』（放送大学，2003 年）

[3] CASIO「$\sqrt{\text{keis}\alpha\text{n}}$」<http://keisan.casio.jp/>

[4] 「風船＆ヘリウム問屋」<http://www.e-tonya.jp/balloon/>